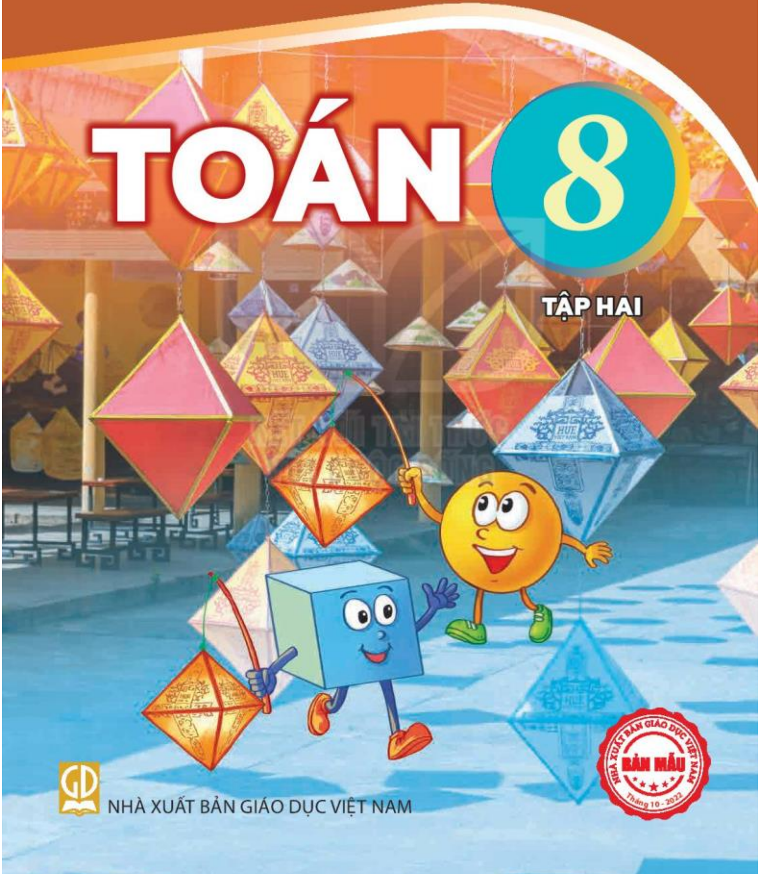
HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG
DOÃN MINH CƯỜNG – TRẦN PHƯƠNG DUNG
SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

TOÁN 8

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG – DOÃN MINH CƯỜNG
TRẦN PHƯƠNG DUNG – SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

TOÁN 8

TẬP HAI

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học được thiết kế gồm:

- Phần **Định hướng**: Chỉ rõ các thuật ngữ, khái niệm và các kiến thức, kĩ năng mà các em cần chú ý trong bài học.
- Phần **Mở đầu**: Thường là một bài toán hay một tình huống có liên quan đến nội dung mới của bài học.
- Phần **Hình thành kiến thức mới**: Gồm các hoạt động *Tìm tòi – Khám phá* ( ) và *Đọc hiểu – Nghe hiểu* ( ) cùng với *Chú ý* hay *Nhận xét*.

– Kiến thức trọng tâm được đặt trong khung màu vàng.

– Câu hỏi ( ) giúp đánh giá kết quả sau hoạt động *Đọc hiểu – Nghe hiểu*.

- Phần **Luyện tập và củng cố**: Gồm *Ví dụ*, *Luyện tập*, *Thực hành* để hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức mới vừa học.
- Phần **Vận dụng**: Gồm các hoạt động *Vận dụng*, *Tranh luận* ( ) và *Thử thách nhỏ* ( ) để giải quyết các tình huống, vấn đề trong thực tiễn và mở rộng kiến thức.

2. Các em sẽ được đồng hành với anh Pi, các bạn Tròn, Vuông trong các bài học để việc học hấp dẫn hơn nhé.

3. Các em có thể tham khảo thêm mục *Em có biết?* để mở rộng hiểu biết của mình. Cuối sách là *Bảng tra cứu thuật ngữ* và *Bảng giải thích thuật ngữ*.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

MỤC LỤC

Chương VI
PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

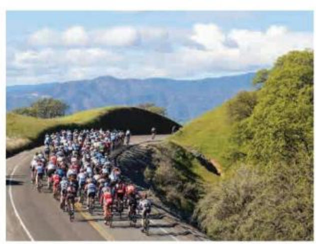
ĐẠI SỐ

Ở lớp 7, từ tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên ta đã xây dựng tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ mà mọi số nguyên cũng đều là số hữu tỉ. Tương tự, từ tập hợp các đa thức ta cũng có thể xây dựng một tập hợp mới gồm các phân thức đại số mà mọi đa thức cũng đều là phân thức đại số. Trong chương này các em sẽ biết thế nào là phân thức đại số, biết cách cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đại số tương tự như cộng, trừ, nhân, chia các phân số.

Bài 21 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Phân thức đại số • Tử thức, mẫu thức • Hai phân thức bằng nhau • Điều kiện xác định của phân thức • Giá trị của phân thức	• Nhận biết phân thức đại số, tử thức và mẫu thức của một phân thức. • Viết điều kiện xác định của phân thức và tính giá trị của phân thức tại giá trị của biến thoả mãn điều kiện xác định. • Nhận biết hai phân thức bằng nhau.

Trong một cuộc đua xe đạp, các vận động viên phải hoàn thành ba chặng đua bao gồm 9 km leo dốc; 5 km xuống dốc và 36 km đường bằng phẳng. Vận tốc trung bình của một vận động viên trên chặng đường bằng phẳng hơn vận tốc leo dốc 5 km/h và kém vận tốc xuống dốc 10 km/h. Nếu biết vận tốc trung bình của vận động viên trên chặng đường bằng phẳng thì có tính được thời gian hoàn thành cuộc đua của vận động viên đó không?



1 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Phân thức đại số là gì?

HĐ1 Trong *tình huống mở đầu*, giả sử vận tốc trung bình của một vận động viên đi xe đạp trên 36 km đường bằng phẳng là x (km/h). Hãy viết biểu thức biểu thị thời gian vận động viên đó hoàn thành chặng leo dốc, chặng xuống dốc, chặng đường bằng phẳng.

HĐ2 Viết biểu thức biểu thị tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài của một hình chữ nhật có chiều rộng là x (cm) và chiều dài là y (cm).

Các biểu thức nhận được ở HĐ1, HĐ2 và các biểu thức như $\frac{2x-1}{3x+1}$; $\frac{x^2-x+1}{2x+1}$;... được gọi là những *phân thức đại số*. Tổng quát, ta có định nghĩa:

> Một phân thức đại số (hay nói gọn là *phân thức*) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là hai đa thức và B khác đa thức 0.
>
> A được gọi là tử thức (hoặc *tử*) và B được gọi là mẫu thức (hoặc *mẫu*).

Nhận xét. Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Đặc biệt, số 0 và số 1 cũng là những phân thức đại số.

Ví dụ 1

a) Cách viết nào sau đây **không** cho một phân thức?

$$\frac{6y^3z}{x^2};\ \frac{xy+z}{-3};\ \frac{y+z}{0};\ \frac{0}{x+1};\ x^3-xy.$$

b) Viết mẫu thức của mỗi phân thức trong các cách viết trên.

Giải

a) Trong các cách viết trên, $\frac{y+z}{0}$ không phải là một phân thức.

b) Các phân thức $\frac{6y^3z}{x^2}$; $\frac{xy+z}{-3}$; $\frac{0}{x+1}$; x^3-xy có mẫu thức lần lượt là: x^2; -3; $x+1$; 1.

Luyện tập 1

Trong các cặp phân thức sau, cặp phân thức nào có cùng mẫu thức?

a) $\frac{-20x}{3y^2}$ và $\frac{4x^3}{5y^2}$;   b) $\frac{5x-10}{x^2+1}$ và $\frac{5x-10}{x^2-1}$;   c) $\frac{5x+10}{4x-8}$ và $\frac{4-2x}{4(x-2)}$.

Tranh luận

$\dfrac{3-2x}{3+\dfrac{1}{x}}$ không phải là phân thức.

$\dfrac{3-2x}{3+\dfrac{1}{x}}$ là phân thức chứ!

Theo em, bạn nào đúng?

2 HAI PHÂN THỨC BẰNG NHAU

Ở lớp 6 các em đã học quy tắc bằng nhau của hai phân số. Tương tự ta có:

Hai phân thức $\dfrac{A}{B}$ và $\dfrac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $AD = BC$.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ nếu } AD = BC.$$

Ví dụ 2

Giải thích vì sao $\dfrac{1+x}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x}$.

Giải

Vì $(1+x)(1-x) = (1-x^2)\cdot 1$ nên $\dfrac{1+x}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x}$.

Luyện tập 2 Khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1-x}{1-x^3}.$$

3 ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH VÀ GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC TẠI MỘT GIÁ TRỊ ĐÃ CHO CỦA BIẾN

Giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

Khi thay các biến trong một phân thức đại số bằng các số, ta được một biểu thức số (nếu mẫu số nhận được là số khác 0). Giá trị của biểu thức số đó gọi là *giá trị của phân thức* tại các giá trị đã cho của biến.

Như vậy, để tính giá trị của phân thức tại những giá trị cho trước của biến ta thay các giá trị cho trước của biến vào phân thức đó rồi tính giá trị của biểu thức số nhận được.

Ví dụ 3 Tính giá trị của phân thức $\dfrac{x^2-x-1}{x^2+3x}$ tại $x = 2$; $x = 1$.

Giải

Tại $x = 2$, phân thức có giá trị là $\dfrac{2^2-2-1}{2^2+3\cdot 2}=\dfrac{1}{10}$.

Tại $x = 1$, phân thức có giá trị là $\dfrac{1^2-1-1}{1^2+3\cdot 1}=\dfrac{-1}{4}$.

Điều kiện xác định của phân thức

Vì phép chia chỉ thực hiện được khi số chia khác 0 nên chỉ có thể tính được giá trị của phân thức $\frac{x^2-x-1}{x^2+3x}$ khi x thoả mãn điều kiện $x^2 + 3x \neq 0$.

Ta nói rằng $x^2 + 3x \neq 0$ là *điều kiện xác định* của phân thức $\frac{x^2-x-1}{x^2+3x}$.

Điều kiện xác định của phân thức $\frac{A}{B}$ là điều kiện của biến để giá trị của mẫu thức B khác 0.

Chú ý. Ta chỉ cần quan tâm đến điều kiện xác định khi tính giá trị của phân thức.

Ví dụ 4

Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x-3}{x+2}$.

Giải

Điều kiện xác định của phân thức là $x + 2 \neq 0$ hay $x \neq -2$.

Luyện tập 3

Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x+1}{x-1}$ và tính giá trị của phân thức tại $x = 2$.

Vận dụng

Trở lại *tình huống mở đầu*. Nếu biết vận tốc của vận động viên trên chặng đường bằng phẳng là 30 km/h, hãy tính thời gian vận động viên đó hoàn thành mỗi chặng đua và tính tổng thời gian để hoàn thành cuộc đua.

BÀI TẬP

6.1. Viết tử thức và mẫu thức của phân thức $\frac{5x-2}{3}$.

6.2. Trong các cặp phân thức sau, cặp phân thức nào có mẫu giống nhau?

a) $\frac{-20x}{3y^2}$ và $\frac{4x}{5y^2}$; b) $\frac{3x-1}{x^2+1}$ và $\frac{3x-1}{x+1}$; c) $\frac{x-1}{3x+6}$ và $\frac{x+1}{3(x+2)}$.

6.3. Vì sao các kết luận sau đúng?

a) $\frac{-6}{-4y} = \frac{3y}{2y^2}$; b) $\frac{x+3}{5} = \frac{x^2+3x}{5x}$; c) $\frac{3x(4x+1)}{16x^2-1} = \frac{-3x}{1-4x}$.

6.4. Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x^2+x-2}{x^3+2}$. Tính giá trị của phân thức trên lần lượt tại $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

6.5. Cho A là một đa thức khác 0 tuỳ ý. Hãy giải thích vì sao $\frac{0}{A} = 0$ và $\frac{A}{A} = 1$.

6.6. Một ô tô chạy với vận tốc trung bình là x (km/h).

a) Viết biểu thức biểu thị thời gian ô tô (tính bằng giờ) chạy hết quãng đường 120 km.

b) Tính thời gian ô tô đi được 120 km trong trường hợp vận tốc trung bình của ô tô là 60 km/h.

Bài 22 TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Tính chất cơ bản của phân thức đại số • Mẫu thức chung • Nhân tử phụ • Quy đồng mẫu thức	• Mô tả tính chất cơ bản của phân thức đại số. • Rút gọn phân thức đại số. • Biết quy đồng mẫu thức nhiều phân thức trong trường hợp thuận lợi.

Liệu có phân thức nào đơn giản hơn nhưng bằng phân thức $\frac{x-y}{x^3-y^3}$ không nhỉ?

1 TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

Nhận biết tính chất cơ bản của phân thức đại số

HĐ1 Nếu nhân cả tử và mẫu của phân thức $\frac{x+y}{x-y}$ với $2x$ ta được phân thức mới nào?

Giải thích vì sao phân thức mới nhận được bằng phân thức đã cho.

HĐ2 Tử và mẫu của phân thức $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ có nhân tử chung là $x-1$. Viết phân thức nhận được sau khi chia cả tử và mẫu của phân thức này cho nhân tử chung đó.

So sánh phân thức mới nhận được với phân thức đã cho.

Từ HĐ1 và HĐ2, ta thấy phân thức đại số có tính chất cơ bản sau:

- Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}\ (M \text{ là một đa thức khác đa thức } 0).$$

- Nếu tử và mẫu của một phân thức có nhân tử chung thì khi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó ta được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A:N}{B:N}=\frac{A}{B}\ (N \text{ là một nhân tử chung}).$$

Ví dụ 1

Dùng tính chất cơ bản của phân thức, giải thích vì sao $\dfrac{2x+2}{x^2-1}=\dfrac{2}{x-1}$.

Giải

Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức, ta có: $\dfrac{2x+2}{x^2-1}=\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x-1}$.

Luyện tập 1 Khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

$$\frac{30xy^2(x-y)}{45xy(x-y)^2}=\frac{2y}{3(x-y)}.$$

Luyện tập 2 Giải thích vì sao $\dfrac{-x}{1-x}=\dfrac{x}{x-1}$.

Chú ý. Tổng quát, ta có quy tắc đổi dấu: Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}.$$

Đổi dấu một đa thức là đổi dấu tất cả các hạng tử của đa thức đó.

2 VẬN DỤNG

a) Rút gọn phân thức

Cách rút gọn một phân thức

Rút gọn một phân thức là biến đổi phân thức đó thành một phân thức mới bằng nó nhưng đơn giản hơn.

Hãy thực hiện các yêu cầu sau đây để rút gọn phân thức $\dfrac{2x^2+2x}{x^2-1}$.

HĐ3 Phân tích tử và mẫu của phân thức $\dfrac{2x^2+2x}{x^2-1}$ thành nhân tử và tìm các nhân tử chung của chúng.

HĐ4 Chia cả tử và mẫu của phân thức $\dfrac{2x^2+2x}{x^2-1}$ cho các nhân tử chung, ta nhận được một phân thức mới bằng phân thức đã cho nhưng đơn giản hơn.

Muốn rút gọn một phân thức đại số ta làm như sau:
- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung;
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

Ví dụ 2

Rút gọn phân thức $P=\dfrac{x^2-xy}{3\left(xy^2-y^3\right)}$.

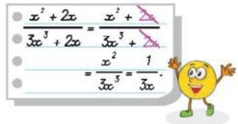
Giải

Ta có: $P=\dfrac{x^2-xy}{3(xy^2-y^3)}=\dfrac{x(x-y)}{3y^2(x-y)}=\dfrac{x}{3y^2}$.

Luyện tập 3 Em hãy trả lời câu hỏi trong *tình huống mở đầu*.

Tranh luận

Tròn thực hiện rút gọn một phân thức như hình bên. Hỏi bạn Tròn làm đúng hay sai? Vì sao?



Thử thách nhỏ

Tìm a sao cho hai phân thức sau bằng nhau:

$$\frac{-ax^2-ax}{x^2-1} \text{ và } \frac{3x}{x-1}.$$

b) Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

Cách quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức là biến đổi các phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho.

Hãy thực hiện các yêu cầu sau để quy đồng mẫu thức hai phân thức:

$$\frac{1}{2x^2+2x} \text{ và } \frac{1}{3x^2-6x}.$$

HĐ5 Phân tích các mẫu thức của hai phân thức đã cho thành nhân tử.

HĐ6 Chọn *mẫu thức chung* (MTC) của hai mẫu thức trên bằng cách lấy tích của các nhân tử được chọn như sau:

– Nhân tử bằng số của MTC là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của các phân thức đã cho (nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số ở MTC là BCNN của chúng);

– Với mỗi luỹ thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn luỹ thừa với số mũ cao nhất.

HĐ7 Tìm *nhân tử phụ* của mỗi mẫu thức bằng cách lấy MTC chia cho mẫu thức đó.

HĐ8 Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức đã cho với nhân tử phụ tương ứng, ta được các phân thức có mẫu thức là MTC đã chọn.

> Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta làm như sau:
> – Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung;
> – Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức bằng cách chia MTC cho mẫu thức đó;
> – Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Ví dụ 3

Quy đồng mẫu thức hai phân thức $\dfrac{3}{5x^3+5x^2}$ và $\dfrac{-7}{2x^3+4x^2+2x}$.

Giải

Ta có: $5x^3 + 5x^2 = 5x^2 \cdot (x+1)$;

$$2x^3 + 4x^2 + 2x = 2x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 2x \cdot (x+1)^2.$$

Mẫu thức chung là $10x^2(x+1)^2$.

Nhân tử phụ của $5x^3 + 5x^2$ là

$$\text{MTC} : \left(5x^3 + 5x^2\right) = 10x^2(x+1)^2 : \left[5x^2(x+1)\right] = 2(x+1).$$

Nhân tử phụ của $2x^3 + 4x^2 + 2x$ là

$$\text{MTC} : \left(2x^3 + 4x^2 + 2x\right) = 10x^2(x+1)^2 : \left[2x(x+1)^2\right] = 5x.$$

Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng, ta có:

$$\frac{3}{5x^3+5x^2} = \frac{3 \cdot 2(x+1)}{10x^2(x+1)^2} = \frac{6(x+1)}{10x^2(x+1)^2} \text{ và } \frac{-7}{2x^3+4x^2+2x} = \frac{-7 \cdot 5x}{10x^2(x+1)^2} = \frac{-35x}{10x^2(x+1)^2}.$$

Luyện tập 4

Quy đồng mẫu thức hai phân thức $\dfrac{1}{3x^2-3}$ và $\dfrac{1}{x^3-1}$.

Tranh luận

Hai phân thức $\dfrac{5}{x-1}$ và $\dfrac{x}{1-x}$ có MTC là $x-1$.

Không đúng, MTC là $(x-1)(1-x)$ chứ!

Theo em, bạn nào chọn MTC hợp lí hơn? Vì sao?

BÀI TẬP

6.7. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, giải thích vì sao các kết luận sau đúng.

a) $\dfrac{(x-2)^3}{x^2-2x} = \dfrac{(x-2)^2}{x}$;

b) $\dfrac{1-x}{-5x+1} = \dfrac{x-1}{5x-1}$.

6.8. Tìm đa thức thích hợp thay cho dấu "?".

$$\frac{y-x}{4-x}=\frac{?}{x-4}.$$

6.9. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x+10}{25x^2+50}$; b) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$; c) $\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^3+1)}$.

6.10. Cho phân thức $P=\frac{x+1}{x^2-1}$.

a) Rút gọn phân thức đã cho, kí hiệu Q là phân thức nhận được.

b) Tính giá trị của P và Q tại $x = 11$. So sánh hai kết quả đó.

6.11. Tìm a sao cho hai phân thức sau bằng nhau:

$$\frac{5x}{x+1} \text{ và } \frac{ax(x-1)}{(1-x)(x+1)}.$$

6.12. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x^3-8}$ và $\frac{3}{4-2x}$; b) $\frac{x}{x^2-1}$ và $\frac{1}{x^2+2x+1}$.

6.13. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x+2}$; $\frac{x+1}{x^2-4x+4}$ và $\frac{5}{2-x}$. b) $\frac{1}{3x+3y}$; $\frac{2x}{x^2-y^2}$ và $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$.

6.14. Cho hai phân thức $\frac{9x^2+3x+1}{27x^3-1}$ và $\frac{x^2-4x}{16-x^2}$.

a) Rút gọn hai phân thức đã cho.

b) Quy đồng mẫu thức hai phân thức nhận được ở câu a.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho phân thức $P = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

a) Viết điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn P và kí hiệu Q là phân thức nhận được.

c) Kiểm tra $x = 13$ có thoả mãn điều kiện xác định của P hay không. Tính giá trị của P và Q tại $x = 13$ rồi so sánh hai kết quả.

Giải

a) Điều kiện xác định của P là $x - 2 \neq 0$ hay $x \neq 2$.

b) $P = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$. Vậy $Q = x + 2$.

c) Vì $x = 13 \neq 2$ nên $x = 13$ thoả mãn điều kiện xác định của P.

Khi đó, ta có $P = \frac{13^2 - 4}{13 - 2} = \frac{165}{11} = 15$ và $Q = 13 + 2 = 15$. Hai kết quả bằng nhau.

Chú ý. Khi tính giá trị của một phân thức tại giá trị đã cho của biến thoả mãn điều kiện xác định, ta nên rút gọn phân thức rồi thay giá trị đã cho của biến vào phân thức đã rút gọn.

Ví dụ 2

Bạn Nam vẽ lá cờ Tổ quốc là một hình chữ nhật có chiều rộng 12 cm và chiều dài 19 cm.

a) Viết phân thức biểu thị tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật nhận được khi tăng mỗi cạnh của hình chữ nhật đã vẽ thêm x (cm).

b) Tính giá trị của phân thức trong câu a tại $x = 2$ và cho biết hình chữ nhật đó có đảm bảo tỉ lệ tiêu chuẩn 2 : 3 của quốc kì Việt Nam không.

Giải

a) Khi tăng mỗi cạnh x (cm) thì hình chữ nhật mới có chiều rộng và chiều dài lần lượt là $12 + x$ và $19 + x$ (cm).

Tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật mới là $\frac{12 + x}{19 + x}$.

b) Giá trị của phân thức $\frac{12 + x}{19 + x}$ tại $x = 2$ là $\frac{12 + 2}{19 + 2} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, vì vậy hình chữ nhật đó đảm bảo tỉ lệ tiêu chuẩn 2 : 3 của quốc kì Việt Nam.

BÀI TẬP

6.15. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{4xy^2}$ và $\frac{5}{6x^2y}$;

b) $\frac{9}{4x^2-36}$ và $\frac{1}{x^2+6x+9}$.

6.16. Cho phân thức $P = \frac{x^3-4x}{(x+2)^2}$.

a) Viết điều kiện xác định của phân thức và tìm tất cả các giá trị của x thoả mãn điều kiện này.

b) Rút gọn phân thức P.

c) Tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = 98$.

6.17. Cho hai phân thức $\frac{x^2+5x}{(x-10)(x^2+10x+25)}$ và $\frac{x^2+10x}{x^4-100x^2}$.

a) Rút gọn hai phân thức đã cho. Kí hiệu P và Q là hai phân thức nhận được.

b) Quy đồng mẫu thức hai phân thức P và Q.

6.18. Lúc 6 giờ sáng, bác Vinh lái ô tô xuất phát từ Hà Nội đi huyện Tĩnh Gia (Thanh Hoá). Khi đến Phủ Lý (Hà Nam), cách Hà Nội khoảng 60 km, bác Vinh dừng lại ăn sáng trong 20 phút. Sau đó, bác Vinh tiếp tục đi về Tĩnh Gia và phải tăng vận tốc thêm 10 km/h để đến nơi đúng giờ dự định.

a) Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô đi trên quãng đường Hà Nội – Phủ Lý. Hãy viết các phân thức biểu thị thời gian bác Vinh chạy xe trên các quãng đường Hà Nội – Phủ Lý và Phủ Lý – Tĩnh Gia, biết rằng quãng đường Hà Nội – Tĩnh Gia có chiều dài khoảng 200 km.

b) Nếu vận tốc ô tô đi trên quãng đường Hà Nội – Phủ Lý là 60 km/h thì bác Vinh đến Tĩnh Gia lúc mấy giờ?

6.19. Để loại bỏ x (tính theo %) chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, ước tính cần chi phí là $\frac{1,7x}{100-x}$ (tỉ đồng).

a) Nếu muốn loại bỏ 90% chất gây ô nhiễm từ khí thải nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu?

b) Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{1,7x}{100-x}$. Hỏi có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm từ khí thải nhà máy hay không?

Bài 23 PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Phép cộng và phép trừ các phân thức đại số	• Thực hiện phép cộng và phép trừ phân thức đại số. • Vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp của phép cộng phân thức và quy tắc dấu ngoặc với phân thức trong tính toán.

Hãy rút gọn biểu thức:
$P = \frac{x}{x+1} - \left[\left(\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{x-1}\right]$.

Không cần tính toán, em thấy ngay kết quả là $P = 0$.

Làm thế nào mà Vuông thấy ngay được kết quả thế nhỉ?

1 CỘNG HAI PHÂN THỨC CÙNG MẪU

Quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu

Ở lớp 6, các em đã biết để cộng các phân số cùng mẫu ta chỉ cần cộng các tử số và giữ nguyên mẫu số. Phép cộng các phân thức cùng mẫu cũng tương tự như vậy.

Hãy thực hiện các yêu cầu sau để làm phép cộng $\frac{2x+y}{x-y} + \frac{-x+3y}{x-y}$.

HĐ1 Cộng các tử thức của hai phân thức đã cho.

HĐ2 Viết phân thức có tử là tổng các tử thức và mẫu là mẫu thức chung ta được kết quả của phép cộng đã cho.

Tổng quát, ta có quy tắc sau:

> Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức: $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M}$.

Chú ý. Kết quả của phép cộng hai phân thức được gọi là *tổng* của hai phân thức đó. Ta thường viết tổng dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 1

Cộng hai phân thức $\frac{5x^2}{x-1}$ và $\frac{5-10x}{x-1}$.

Giải

Ta có: $\frac{5x^2}{x-1} + \frac{5-10x}{x-1} = \frac{5x^2+5-10x}{x-1} = \frac{5\left(x^2-2x+1\right)}{x-1} = \frac{5(x-1)^2}{x-1} = 5(x-1)$.

Luyện tập 1 Tính các tổng sau:

a) $\frac{3x+1}{xy}+\frac{2x-1}{xy}$;

b) $\frac{3x}{x^2+1}+\frac{-3x+1}{x^2+1}$.

2 CỘNG HAI PHÂN THỨC KHÁC MẪU

Quy tắc cộng hai phân thức khác mẫu

Hãy thực hiện các yêu cầu sau để làm phép cộng $\frac{1}{x}+\frac{-1}{y}$.

HĐ3 Quy đồng mẫu thức hai phân thức đã cho.

HĐ4 Cộng hai phân thức có cùng mẫu thức nhận được trong HĐ3 ta được kết quả của phép cộng $\frac{1}{x}+\frac{-1}{y}$.

Tổng quát, ta có quy tắc sau:

> Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Ví dụ 2

Tính tổng $\frac{5}{x}+\frac{3}{1-x}$.

Giải

Quy đồng mẫu hai phân thức đã cho: $\frac{5}{x}=\frac{5(1-x)}{x(1-x)}$; $\frac{3}{1-x}=\frac{3x}{x(1-x)}$.

Do đó $\frac{5}{x}+\frac{3}{1-x}=\frac{5(1-x)}{x(1-x)}+\frac{3x}{x(1-x)}=\frac{5(1-x)+3x}{x(1-x)}=\frac{5-2x}{x(1-x)}$.

Luyện tập 2 Tính tổng $\frac{5}{2x^2(6x+y)}+\frac{3}{5xy(6x+y)}$.

3 TRỪ HAI PHÂN THỨC

Quy tắc trừ hai phân thức

Ở lớp 6, các em đã biết: Để trừ hai phân số cùng mẫu ta trừ các tử và giữ nguyên mẫu; để trừ hai phân số khác mẫu ta quy đồng mẫu hai phân số rồi trừ hai phân số cùng mẫu nhận được. Để trừ hai phân thức, ta cũng làm tương tự như vậy.

HĐ5 Trừ các tử thức và giữ nguyên mẫu thức để tính $\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x+3}{x+1}$.

HĐ6 Quy đồng mẫu thức của hai phân thức $\frac{1}{x+1}$ và $\frac{1}{x}$; trừ các tử thức của hai phân thức nhận được và giữ nguyên mẫu thức chung để tính $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

Tổng quát, ta có quy tắc sau:

- Muốn trừ hai phân thức có cùng mẫu thức ta trừ các tử thức và giữ nguyên mẫu thức.
- Muốn trừ hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi trừ các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Ví dụ 3 Tính $\frac{2x+1}{x}-\frac{y-1}{y}$.

Giải

Quy đồng mẫu thức hai phân thức đã cho:

$$\frac{2x+1}{x}=\frac{(2x+1)y}{xy};\ \frac{y-1}{y}=\frac{x(y-1)}{xy}.$$

Do đó $\frac{2x+1}{x}-\frac{y-1}{y}=\frac{(2x+1)y}{xy}-\frac{x(y-1)}{xy}=\frac{(2x+1)y-x(y-1)}{xy}=\frac{xy+x+y}{xy}$.

Luyện tập 3 Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{3-2x}{x-1}-\frac{2+5x}{x-1}$; b) $\frac{1}{4x^2y}-\frac{1}{6xy^2}$.

Chú ý. Cũng như phép trừ phân số, ta có thể chuyển phép trừ phân thức thành phép cộng phân thức như sau:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}.$$

$\frac{-C}{D}$ gọi là phân thức đối của phân thức $\frac{C}{D}$ và kí hiệu là $-\frac{C}{D}$; tổng của một phân thức và phân thức đối của nó bằng 0.

4 CỘNG, TRỪ NHIỀU PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Cách cộng, trừ nhiều phân thức

Vì trừ một phân thức cũng là cộng với phân thức đối của phân thức đó nên các biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ phân thức cũng có thể xem là chỉ gồm các phép cộng phân thức. Chẳng hạn, biểu thức $P=\frac{2x+1}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}$ có thể viết thành

$$P=\frac{2x+1}{x+1}+\frac{x}{x-1}+\frac{-1}{x^2-1}.$$

Cũng như phép cộng phân số, phép cộng phân thức cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp. Vì vậy, khi làm tính với một biểu thức chỉ gồm các phép cộng phân thức ta có thể đổi chỗ, nhóm (kết hợp) các số hạng một cách tuỳ ý.

Ví dụ 4

Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

Giải

Ta có: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-1}{x}$ ← Thay phép trừ bằng phép cộng với phân thức đối

$= \frac{1}{x} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{y}$ ← Sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp

$= 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$.

Chú ý. Ta cũng có thể viết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$.

Tổng quát, trong các biểu thức ta có thể đổi chỗ các số hạng kèm theo dấu của nó.

Luyện tập 4 Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Rút gọn biểu thức có dấu ngoặc

Cũng như khi tính toán với phân số, khi rút gọn một biểu thức có dấu ngoặc, ta có thể bỏ các dấu ngoặc bằng cách sử dụng *quy tắc dấu ngoặc* sau:

- Nếu trước dấu ngoặc có dấu "+" thì bỏ dấu ngoặc và giữ nguyên các số hạng.
- Nếu trước dấu ngoặc có dấu "–" thì bỏ dấu ngoặc và đổi dấu các số hạng trong dấu ngoặc.

Ví dụ 5

Rút gọn biểu thức $P = \frac{3}{2x+1} + \left[\frac{5}{4x-1} - \left(\frac{5}{4x-1} + \frac{3}{2x+1}\right)\right]$.

Giải

$P = \frac{3}{2x+1} + \left[\frac{5}{4x-1} - \left(\frac{5}{4x-1} + \frac{3}{2x+1}\right)\right]$

$= \frac{3}{2x+1} + \left[\frac{5}{4x-1} - \frac{5}{4x-1} - \frac{3}{2x+1}\right]$ ← Trước dấu ngoặc có dấu "–", đổi dấu các số hạng trong ngoặc

$= \frac{3}{2x+1} + \frac{5}{4x-1} - \frac{5}{4x-1} - \frac{3}{2x+1}$ ← Trước dấu ngoặc có dấu "+"

$= \left(\frac{3}{2x+1} - \frac{3}{2x+1}\right) + \left(\frac{5}{4x-1} - \frac{5}{4x-1}\right)$ ← Sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp

$= 0$.

Luyện tập 5 Em hãy giải thích cách làm của Vuông trong *tình huống mở đầu*.

Vận dụng

Chú Đức lái ô tô từ Hà Nội về quê. Từ nhà chú đến đường cao tốc dài khoảng 20 km, xe chạy trong thành phố với vận tốc x (km/h). Trên 50 km đường cao tốc, xe tăng vận tốc thêm 55 km/h. Ra khỏi cao tốc, xe còn phải chạy thêm 15 phút thì về đến quê.

a) Viết các phân thức biểu thị thời gian xe chạy trong thành phố và thời gian xe chạy trên đường cao tốc.

b) Viết phân thức biểu thị tổng thời gian chú Đức đi từ Hà Nội về quê.

BÀI TẬP

Trong các bài tập từ 6.20 đến 6.24 dưới đây, hãy thực hiện các phép tính đã chỉ ra.

6.20. a) $\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2}+\dfrac{5x-1-x^2}{2x^2}$; b) $\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}$; c) $\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{9}{2x(3-x)}$.

6.21. a) $\dfrac{5-3x}{x+1}-\dfrac{-2+5x}{x+1}$; b) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}$; c) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2+3x}{x^3+1}$.

6.22. a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}$;

b) $\dfrac{2x-1}{x}+\dfrac{1-x}{2x+1}+\dfrac{3}{x^2-9}+\dfrac{1-2x}{x}+\dfrac{x-1}{2x+1}-\dfrac{3}{x+3}$.

6.23. a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}+\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{4-x}{5x-10}$;

b) $\dfrac{x}{x^2+1}-\left(\dfrac{3}{x+6}+\dfrac{2-x}{x+4}\right)+\left[\dfrac{3}{x+6}-\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x-2}{x+4}\right)\right]$.

6.24. a) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}$;

b) $\dfrac{x}{(x-y)^2}+\dfrac{y}{y^2-x^2}$.

6.25. Một tàu du lịch chạy xuôi dòng 15 km, sau đó quay ngược lại để trở về điểm xuất phát và kết thúc chuyến du lịch. Biết rằng vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 10 km/h và vận tốc của dòng nước là x (km/h).

a) Hãy viết các phân thức biểu thị theo x thời gian xuôi dòng, thời gian ngược dòng và tổng thời gian tàu chạy.

b) Tính tổng thời gian tàu chạy khi vận tốc dòng nước là 2 km/h.

Bài 24 PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Phép nhân, phép chia các phân thức đại số	• Thực hiện phép nhân và phép chia hai phân thức đại số. • Vận dụng tính chất của phép nhân phân thức trong tính toán.

1 NHÂN HAI PHÂN THỨC

Quy tắc nhân hai phân thức

HĐ1 Làm theo hướng dẫn của anh Pi trong *tình huống mở đầu* để nhân hai phân thức $\frac{2x}{x+1}$ và $\frac{x-1}{x}$.

Tổng quát, ta có quy tắc sau:

> Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau:
> $$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

Chú ý. Kết quả của phép nhân hai phân thức được gọi là *tích*. Ta thường viết tích dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 1 Nhân hai phân thức $\frac{2x-1}{5x+1}$ và $\frac{5x+1}{4x^2-1}$.

Giải

Ta có: $\frac{2x-1}{5x+1}\cdot\frac{5x+1}{4x^2-1}=\frac{(2x-1)(5x+1)}{(5x+1)\left(4x^2-1\right)}=\frac{(2x-1)(5x+1)}{(5x+1)(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2x+1}.$

Luyện tập 1 Làm tính nhân:

a) $\frac{x}{x+y}\cdot\frac{2x+2y}{3xy}$;

b) $\frac{3x}{4x^2-1}\cdot\frac{-2x+1}{2x^2}$.

Chú ý. Cũng như phép nhân phân số, phép nhân phân thức có các tính chất sau:

a) Giao hoán: $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{C}{D}\cdot\frac{A}{B}$;

b) Kết hợp: $\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\right)\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right)$;

c) Phân phối đối với phép cộng: $\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)=\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}+\frac{A}{B}\cdot\frac{E}{F}$.

Áp dụng các tính chất của phép nhân phân thức ta có thể rút gọn một số biểu thức, chẳng hạn: $\frac{x}{y}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y}{x}=\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$.

2 CHIA HAI PHÂN THỨC

Quy tắc chia hai phân thức

Cách chia hai phân thức cũng tương tự như cách chia hai phân số. Ta có quy tắc:

> Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức $\frac{D}{C}$:
>
> $$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}, \text{ với } \frac{C}{D}\neq 0.$$

$\frac{C}{D}\cdot\frac{D}{C}=1$. Ta nói $\frac{D}{C}$ là phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

Ví dụ 2

Làm tính chia: $\frac{5}{x^2-1}:\frac{3}{x^2-x}$.

Giải

Ta có:

$$\frac{5}{x^2-1}:\frac{3}{x^2-x}=\frac{5}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-x}{3}=\frac{5(x^2-x)}{3(x^2-1)}=\frac{5x(x-1)}{3(x-1)(x+1)}=\frac{5x}{3(x+1)}.$$

Luyện tập 2 Làm tính chia: $\frac{3x}{2y^2}:\left(-\frac{5x^2}{12y^3}\right)$.

Thử thách nhỏ

Kết luận sau đúng hay sai?

$$\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x}\right):\frac{1}{x}=\frac{1}{x}:\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x}\right).$$

Vận dụng

Bác Châu vay ngân hàng 1,2 tỉ đồng để mua nhà theo hình thức trả góp. Số tiền bác Châu phải trả mỗi tháng bao gồm số tiền gốc phải trả hằng tháng (bằng số tiền gốc chia đều cho số tháng vay) và số tiền lãi phải trả hằng tháng (bằng số tiền gốc nhân với lãi suất tháng).

a) Gọi r là lãi suất năm của khoản vay trả góp này. Tính số tiền x (triệu đồng) mà bác Châu phải trả mỗi tháng theo số tháng vay y (tháng) và lãi suất năm r. Từ đó suy ra công thức tính lãi suất năm r theo x và y.

b) Tính giá trị của r tại $x = 30$, $y = 48$ rồi cho biết, nếu trả góp mỗi tháng 30 triệu đồng trong vòng 4 năm thì lãi suất năm (tính theo %) của khoản vay này là bao nhiêu?

BÀI TẬP

6.26. Làm tính nhân phân thức:

a) $\left(-\dfrac{3x}{5xy^2}\right)\cdot\left(-\dfrac{5y^2}{12xy}\right)$;   b) $\dfrac{x^2-x}{2x+1}\cdot\dfrac{4x^2-1}{x^3-1}$.

6.27. Làm tính chia phân thức:

a) $\left(-\dfrac{3x}{5xy^2}\right):\left(-\dfrac{5y^2}{12xy}\right)$;   b) $\dfrac{4x^2-1}{8x^3-1}:\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2+2x+1}$.

6.28. Tìm hai phân thức P và Q thoả mãn:

a) $P\cdot\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{x^2+x}{4x^2-1}$;   b) $Q:\dfrac{x^2}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2-2x}$.

6.29. Cho hai phân thức $P=\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$ và $Q=\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$.

a) Rút gọn P và Q.

b) Sử dụng kết quả của câu a, tính $P \cdot Q$ và $P : Q$.

6.30. Trở lại tình huống trong Vận dụng.

a) Nếu mỗi tháng bác Châu trả 15 triệu đồng trong 10 năm thì lãi suất năm (tính theo %) là bao nhiêu? Hãy cho biết tổng số tiền thực tế bác Châu phải trả chênh lệch bao nhiêu so với khoản vay 1,2 tỉ đồng.

b) Trong công thức tính lãi suất năm nói trên, hai biến x, y phải thoả mãn các điều kiện $x > 0$, $y > 0$, $xy > 1\,200$. Em hãy giải thích ý nghĩa thực tiễn của các điều kiện này.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

a) Tính hiệu $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

b) Sử dụng kết quả câu a, rút gọn biểu thức sau: $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

c) Sử dụng kết quả câu b, tính nhanh: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$.

Giải

a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$.

b) Theo câu a, ta có $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Do đó $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$; $\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$.

Vậy $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{(x+3)-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}.$$

c) Giá trị của biểu thức số cần tính chính là giá trị của biểu thức vừa rút gọn tại $x = 1$, do đó bằng $\frac{3}{1\cdot(1+3)}=\frac{3}{4}$.

Ví dụ 2

Rút gọn biểu thức $P=\frac{x+1}{x^3-1}\left[\left(4x^2-1\right)\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}+1\right)-5\right]$.

Giải

Ta có $\left(4x^2-1\right)\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}+1\right)=\frac{4x^2-1}{2x-1}-\frac{4x^2-1}{2x+1}+4x^2-1$

$$=2x+1-(2x-1)+4x^2-1=4x^2+1.$$

Do đó $P=\frac{x+1}{x^3-1}\left[4x^2+1-5\right]=\frac{(x+1)\left(4x^2-4\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{(x+1)4(x+1)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{4(x+1)^2}{x^2+x+1}$.

BÀI TẬP

Trong các bài tập từ 6.31 đến 6.33 dưới đây, hãy thực hiện các phép tính đã chỉ ra.

6.31. a) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$; b) $\dfrac{x}{2x-y}+\dfrac{y}{2x+y}+\dfrac{3xy}{y^2-4x^2}$.

6.32. a) $\dfrac{4x-6}{5x^2-x}\cdot\dfrac{25x^2-10x+1}{27-8x^3}$; b) $\dfrac{2x+10}{(x-3)^2}:\dfrac{(x+5)^3}{x^2-9}$.

6.33. a) $\dfrac{4x^2-1}{16x^2-1}\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{1-4x^2}\right)$; b) $\left(\dfrac{x+y}{xy}-\dfrac{2}{x}\right)\dfrac{x^3y^3}{x^3-y^3}$.

6.34. Cho biểu thức $P=\dfrac{x^2-6x+9}{9-x^2}+\dfrac{4x+8}{x+3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P tại $x=7$.

c) Chứng tỏ $P=3+\dfrac{2}{x+3}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

6.35. Một xưởng may lập kế hoạch may 80 000 bộ quần áo trong x ngày. Nhờ cải tiến kĩ thuật, xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm 11 ngày và may vượt kế hoạch 100 bộ quần áo.

a) Hãy viết phân thức theo biến x biểu thị số bộ quần áo mỗi ngày xưởng may được theo kế hoạch.

b) Viết phân thức biểu thị số bộ quần áo thực tế xưởng may được mỗi ngày.

c) Viết biểu thức biểu thị số bộ quần áo mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn so với kế hoạch.

d) Nếu theo kế hoạch, mỗi ngày xí nghiệp may 800 bộ quần áo thì nhờ cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn so với kế hoạch bao nhiêu bộ quần áo?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

6.36. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\dfrac{(1-x)^2}{2-x}$.

B. $\dfrac{3x}{(x+2)^2}=\dfrac{3x}{(x-2)^2}$.

C. $\dfrac{3x}{(x+2)^2}=\dfrac{-3x}{(x-2)^2}$.

D. $\dfrac{3x}{(x+2)^2}=\dfrac{3x}{(-x-2)^2}$.

6.37. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\dfrac{-6x}{-4x^2(x+2)^2}=\dfrac{3}{2x(x+2)^2}$.

B. $\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{10x}{4x}$.

C. $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

D. $\dfrac{-6x}{-4(-x)^2(x-2)^2}=\dfrac{3}{2x(-x+2)^2}$.

6.38. Trong đẳng thức $\dfrac{2x^2+1}{4x-1}=\dfrac{8x^3+4x}{Q}$, Q là đa thức

A. $4x$.

B. $4x^2$.

C. $16x-4$.

D. $16x^2-4x$.

6.39. Nếu $\dfrac{-5x+5}{2xy}-\dfrac{-9x-7}{2xy}=\dfrac{bx+c}{xy}$ thì $b+c$ bằng

A. -4.

B. 8.

C. 4.

D. -10.

6.40. Một ngân hàng huy động vốn với mức lãi suất một năm (tính theo %) là x. Để sau một năm, người gửi được lãi a đồng thì người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là

A. $\dfrac{100a}{x}$ (đồng).

B. $\dfrac{a}{x+100}$ (đồng).

C. $\dfrac{a}{x+1}$ (đồng).

D. $\dfrac{100a}{x+100}$ (đồng).

B. TỰ LUẬN

6.41. Tìm đa thức P trong các đẳng thức sau:

a) $P+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{x^2-2x+4}$;

b) $P-\dfrac{4(x-2)}{x+2}=\dfrac{16}{x-2}$;

c) $P\cdot\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}$;

d) $P:\dfrac{x^2-9}{2x+4}=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x}$.

6.42. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{2}{3x}+\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{6x^2-4}{2x(1-x)}$;

b) $\dfrac{x^3+1}{1-x^3}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

c) $\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2}{1-x}\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{4x^2-1}$;

d) $1+\dfrac{x^3-x}{x^2+1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

6.43. Cho phân thức $P=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

a) Viết điều kiện xác định của P.

b) Hãy viết P dưới dạng $P=a-\dfrac{b}{x+1}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương.

c) Với giá trị nguyên nào của x thì P có giá trị là số nguyên?

6.44. Một xe ô tô đi từ Hà Nội đến Vinh với vận tốc trung bình 60 km/h và dự kiến sẽ đến Vinh sau 5 giờ xe chạy. Tuy nhiên, sau $2\frac{2}{3}$ giờ chạy với vận tốc 60 km/h, xe dừng nghỉ 20 phút. Sau khi dừng nghỉ, để đến Vinh đúng thời gian dự kiến, xe phải tăng vận tốc so với chặng đầu.

a) Tính độ dài quãng đường Hà Nội – Vinh.

b) Tính độ dài quãng đường còn lại sau khi dừng nghỉ.

c) Cho biết ở chặng thứ hai xe tăng vận tốc thêm x (km/h). Hãy viết biểu thức P biểu thị thời gian (tính bằng giờ) thực tế xe chạy hết chặng đường Hà Nội – Vinh.

d) Tính giá trị của P lần lượt tại $x = 5$; $x = 10$; $x = 15$, từ đó cho biết ở chặng thứ hai (sau khi xe dừng nghỉ):

– Nếu tăng vận tốc thêm 5 km/h thì xe đến Vinh muộn hơn dự kiến bao nhiêu giờ?

– Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì xe đến Vinh có đúng thời gian dự kiến không?

– Nếu tăng vận tốc thêm 15 km/h thì xe đến Vinh sớm hơn dự kiến bao nhiêu giờ?

Chương VII PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC NHẤT

ĐẠI SỐ

Chương này trình bày cách giải phương trình bậc nhất một ẩn và ứng dụng của chúng, khái niệm hàm số và đồ thị của hàm số, cách vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất và khái niệm hệ số góc của đường thẳng.

Bài 25 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Phương trình bậc nhất một ẩn • Ẩn • Nghiệm	• Hiểu khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình bậc nhất.

Bác An gửi tiết kiệm 150 triệu đồng với kì hạn 12 tháng. Đến cuối kì (tức là sau 1 năm), bác An thu được số tiền cả vốn lẫn lãi là 159 triệu đồng. Tính lãi suất gửi tiết kiệm của bác An.

1 PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Nhận biết phương trình một ẩn

Xét *bài toán mở đầu.*

HĐ1 Gọi x (viết dưới dạng số thập phân) là lãi suất gửi tiết kiệm của bác An. Viết biểu thức tính số tiền lãi mà bác An nhận được sau 1 năm theo x.

HĐ2 Số tiền bác An thu được sau 1 năm bao gồm cả số tiền vốn và số tiền lãi. Dựa vào kết quả của HĐ1, viết hệ thức chứa x biểu thị số tiền bác An thu được là 159 triệu đồng.

Ngân hàng thường công bố lãi suất ở dạng phần trăm. Lãi suất $r = 5\%$ nghĩa là

$$r = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Hệ thức chứa x nhận được ở HĐ2 gọi là một *phương trình với ẩn số x* (hay ẩn x).

Tổng quát, ta có:

> Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.

Nhận biết khái niệm nghiệm của phương trình

HĐ3 Xét phương trình $2x + 9 = 3 - x$. (1)

a) Chứng minh rằng $x = -2$ thoả mãn phương trình (1) (tức là hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị khi $x = -2$).

Khi đó, ta nói $x = -2$ là một *nghiệm* của phương trình (1).

b) Bằng cách thay trực tiếp vào hai vế của phương trình, hãy kiểm tra xem $x = 1$ có phải là một nghiệm của phương trình (1) không.

> Số x_0 gọi là **nghiệm** của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu giá trị của $A(x)$ và $B(x)$ tại x_0 bằng nhau.
>
> Giải một phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Chú ý. Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường được kí hiệu là S.

Ví dụ 1

Cho phương trình $2x - 5 = 4 - x$.

Kiểm tra xem $x = 3$ và $x = -1$ có là nghiệm của phương trình đã cho không?

Giải

Với $x = 3$, thay vào hai vế của phương trình ta có: $2 \cdot 3 - 5 = 4 - 3$ (đều bằng 1).

Do đó, $x = 3$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x = -1$, thay vào hai vế của phương trình ta có: $2 \cdot (-1) - 5 \neq 4 - (-1)$.

Do đó, $x = -1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Luyện tập 1

Hãy cho ví dụ về một phương trình với ẩn x và kiểm tra xem $x = 2$ có là một nghiệm của phương trình đó không.

2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN VÀ CÁCH GIẢI

Khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình một ẩn đơn giản nhất là phương trình có dạng sau:

> Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn x.

a gọi là hệ số của x,
b gọi là hạng tử tự do,
x gọi là ẩn.

? Những phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $2x + 1 = 0$; b) $-x + 1 = 0$; c) $0 \cdot x + 2 = 0$; d) $(-2) \cdot x = 0$.

Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

HĐ4 Xét phương trình bậc nhất một ẩn $2x - 6 = 0$. (2)

Hãy thực hiện các yêu cầu sau để giải phương trình (2) (tức là tìm nghiệm của nó):

a) Sử dụng quy tắc chuyển vế, hãy chuyển hạng tử tự do -6 sang vế phải.

b) Sử dụng quy tắc nhân, nhân cả hai vế của phương trình với $\frac{1}{2}$ (tức là chia cả hai vế của phương trình cho hệ số của x là 2) để tìm nghiệm x.

- Quy tắc chuyển vế:
$A + C = B$ hay $A = B - C$.
- Quy tắc nhân:
$A = B$ hay $A \cdot C = B \cdot C$
nếu $C \neq 0$.

Trong thực hành, ta trình bày cách tìm nghiệm của phương trình (2) trong HĐ4 như sau:

$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

- Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) được giải như sau:
$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}.$$
- Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) luôn có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

Ví dụ 2

Giải các phương trình sau:

a) $3x + 11 = 0$;

b) $2 - \frac{1}{3}x = 0$.

Giải

a) $3x + 11 = 0$

$3x = -11$

$x = -\frac{11}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{11}{3}$.

b) $2 - \frac{1}{3}x = 0$

$-\frac{1}{3}x = -2$

$x = (-2) : \left(-\frac{1}{3}\right)$

$x = 6$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 6$.

Ta còn nói tập nghiệm của phương trình $3x + 11 = 0$ là $S = \left\{-\frac{11}{3}\right\}$.

Luyện tập 2

Giải các phương trình sau:

a) $2x - 5 = 0$;

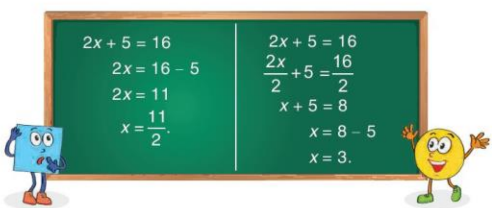
b) $4 - \frac{2}{5}x = 0$.

Vận dụng 1

Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Tranh luận

Hai bạn Vuông và Tròn giải phương trình $2x + 5 = 16$ như sau:



Theo em, bạn nào giải đúng, bạn nào giải sai? Giải thích.

3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG $ax + b = 0$

Phương trình đưa về dạng $ax + b = 0$

Bằng cách chuyển vế và nhân cả hai vế của phương trình với một số khác 0, ta có thể đưa một số phương trình ẩn x về phương trình dạng $ax + b = 0$ và do đó có thể giải được chúng.

Ví dụ 3

Giải phương trình $5x - (2 - 3x) = 4(x + 3)$.

Giải

$5x - 2 + 3x = 4x + 12$ ← Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc

$5x + 3x - 4x = 12 + 2$ ← Chuyển các hạng tử chứa x sang vế trái, các hạng tử không chứa x sang vế phải

$4x = 14$ ← Thu gọn và giải phương trình nhận được

$x = \dfrac{14}{4}$

$x = \dfrac{7}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{7}{2}$.

Phương trình ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$. Giải một phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 4

Giải phương trình $\dfrac{3x-2}{2} + x = 2 + \dfrac{1-2x}{3}$.

Giải

$\dfrac{3(3x-2)+6x}{6} = \dfrac{12+2(1-2x)}{6}$ ← Quy đồng mẫu hai vế

$3(3x - 2) + 6x = 12 + 2(1 - 2x)$ ← Nhân hai vế với 6 để khử mẫu

$9x - 6 + 6x = 12 + 2 - 4x$ ← Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc

$9x + 6x + 4x = 12 + 2 + 6$ ← Chuyển các hạng tử chứa x sang vế trái, các hạng tử không chứa x sang vế phải

$19x = 20$ ← Thu gọn và giải phương trình nhận được

$x = \dfrac{20}{19}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{20}{19}$.

Luyện tập 3

Giải các phương trình sau:

a) $5x - (2 - 4x) = 6 + 3(x - 1)$;

b) $\dfrac{x-1}{4} + 2x = 3 - \dfrac{2x-3}{3}$.

Vận dụng 2

Hai bạn Lan và Hương cùng vào hiệu sách. Lan mua 5 quyển vở cùng loại và 1 quyển sách giá 50 nghìn đồng. Hương mua 3 quyển vở cùng loại với loại vở của Lan và 1 quyển sách giá 74 nghìn đồng. Số tiền phải trả của Lan và Hương là bằng nhau.

a) Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền của mỗi quyển vở. Viết phương trình biểu thị tổng số tiền mua sách và vở của hai bạn Lan và Hương là bằng nhau.

b) Giải phương trình nhận được ở câu a để tìm giá tiền của mỗi quyển vở.

BÀI TẬP

7.1. Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất một ẩn trong các phương trình sau:

a) $x + 1 = 0$; b) $0x - 2 = 0$; c) $2 - x = 0$; d) $3x = 0$.

7.2. Giải các phương trình sau:

a) $5x - 4 = 0$; b) $3 + 2x = 0$; c) $7 - 5x = 0$; d) $\frac{3}{2} + \frac{5}{3}x = 0$.

7.3. Giải các phương trình sau:

a) $7x - (2x + 3) = 5(x - 2)$; b) $x + \frac{2x-1}{5} = 3 + \frac{3-x}{4}$.

7.4. Ở một số quốc gia, người ta dùng cả hai đơn vị đo nhiệt độ là độ Fahrenheit (°F) và độ Celcius (°C), liên hệ với nhau bởi công thức $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Hãy tính độ Fahrenheit tương ứng với 10 °C.

7.5. Hiện nay tuổi của bố bạn Nam gấp 3 lần tuổi của Nam. Sau 10 năm nữa thì tổng số tuổi của Nam và bố là 76 tuổi. Gọi x là số tuổi hiện nay của Nam.

a) Biểu thị tuổi hiện nay của bố bạn Nam theo tuổi hiện tại của Nam.

b) Viết phương trình biểu thị sự kiện sau 10 năm nữa thì tổng số tuổi của Nam và bố là 76 tuổi.

c) Giải phương trình nhận được ở câu b để tính tuổi của Nam và bố hiện nay.

7.6. Bạn Mai mua cả sách và vở hết 500 nghìn đồng. Biết rằng số tiền mua sách nhiều gấp rưỡi số tiền mua vở, hãy tính số tiền bạn Mai dùng để mua mỗi loại.

Bài 26 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Giải toán bằng cách lập phương trình	Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình bậc nhất.

Một xe máy khởi hành từ một địa điểm ở Hà Nội đi Thanh Hoá lúc 6 giờ với vận tốc 40 km/h. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng xuất phát từ điểm khởi hành của xe máy để đi Thanh Hoá với vận tốc 60 km/h và đi cùng tuyến đường với xe máy. Hỏi vào lúc mấy giờ thì ô tô đuổi kịp xe máy?

Giải toán bằng cách lập phương trình

Xét *bài toán mở đầu.*

HĐ1 Gọi x (giờ) ($x > 0$) là thời gian di chuyển của ô tô. Hãy biểu thị quãng đường đi được của ô tô theo x.

HĐ2 Hãy biểu thị thời gian di chuyển của xe máy theo x, từ đó tính quãng đường đi được của xe máy theo x.

HĐ3 Ô tô đuổi kịp xe máy khi quãng đường đi được của chúng bằng nhau. Viết phương trình ẩn x thu được và giải phương trình này để tìm x rồi kết luận.

Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Ví dụ 1

Cô Hương đầu tư 500 triệu đồng vào hai khoản: mua trái phiếu doanh nghiệp với lãi suất 8% một năm và mua trái phiếu chính phủ với lãi suất 5% một năm. Cuối năm cô Hương nhận được 35,5 triệu đồng tiền lãi. Hỏi cô Hương đã đầu tư vào mỗi khoản bao nhiêu tiền?

Giải

Gọi số tiền cô Hương dùng để mua trái phiếu doanh nghiệp là x (triệu đồng).

Điều kiện: $0 \leq x \leq 500$.

Khi đó số tiền cô Hương dùng để mua trái phiếu chính phủ là $500 - x$ (triệu đồng).

Số tiền lãi cô Hương thu được từ trái phiếu doanh nghiệp là $0,08x$ (triệu đồng) và số tiền lãi thu được từ trái phiếu chính phủ là $0,05(500 - x)$ (triệu đồng).

Theo đề bài, ta có phương trình: $0,08x + 0,05(500 - x) = 35,5$.

Giải phương trình:

$$0,08x + 0,05(500 - x) = 35,5$$
$$0,08x + 25 - 0,05x = 35,5$$
$$0,08x - 0,05x = 35,5 - 25$$
$$0,03x = 10,5$$
$$x = 350.$$

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy cô Hương đã dùng 350 triệu đồng để mua trái phiếu doanh nghiệp và 150 triệu đồng để mua trái phiếu chính phủ.

Ví dụ 2

Cần phải trộn bao nhiêu gam dung dịch acid nồng độ 60% với bao nhiêu gam dung dịch acid cùng loại nồng độ 30% để được 300 g dung dịch acid nồng độ 50%?

Giải

Gọi x (g) là khối lượng dung dịch acid nồng độ 60% cần lấy.

Điều kiện: $0 < x < 300$.

Khi đó khối lượng dung dịch acid nồng độ 30% là $300 - x$ (g).

Trong 300 g dung dịch acid nồng độ 50% có: $0,5 \cdot 300 = 150$ (g) acid nguyên chất.

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$0,6x + 0,3(300 - x) = 150.$$

Giải phương trình:

$$0,6x + 0,3(300 - x) = 150$$
$$0,6x + 90 - 0,3x = 150$$
$$0,3x = 60.$$
$$x = 200.$$

Giá trị này của x phù hợp với điều kiện của ẩn.

Vậy phải lấy 200 g dung dịch acid nồng độ 60% pha với 100 g dung dịch acid nồng độ 30% để được 300 g dung dịch acid nồng độ 50%.

Luyện tập

Bác Mai đi siêu thị mua một mặt hàng đang có chương trình khuyến mại giảm giá 20%. Vì có thẻ khách hàng thân thiết của siêu thị nên bác được giảm thêm 5% trên giá đã giảm, do đó bác Mai chỉ phải trả 380 nghìn đồng cho mặt hàng đó. Hỏi giá ban đầu của mặt hàng đó nếu không khuyến mại là bao nhiêu?

Tranh luận

Xét bài toán sau:

"Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng với vận tốc 40 km/h. Sau đó 20 phút, trên cùng tuyến đường đó, một ô tô xuất phát từ Hải Phòng đi Hà Nội với vận tốc 60 km/h. Biết quãng đường từ Hà Nội đến Hải Phòng dài khoảng 120 km. Hỏi sau bao lâu, kể từ khi xe máy khởi hành thì hai xe gặp nhau?"

Để giải bài toán này, hai bạn Vuông và Tròn chọn ẩn như sau:

Theo em, trong hai cách chọn ẩn của Vuông và Tròn, cách nào sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn?

BÀI TẬP

7.7. Chị Linh làm việc trong một ngân hàng và được thưởng Tết bằng 2,5 tháng lương. Tổng thu nhập một năm của chị Linh bao gồm lương 12 tháng và thưởng Tết là 290 triệu đồng. Hỏi lương hằng tháng của chị Linh là bao nhiêu?

7.8. Bác Hưng đầu tư 300 triệu đồng vào hai khoản: mua trái phiếu doanh nghiệp với lãi suất 8% một năm và gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 6% một năm. Cuối năm bác Hưng nhận được 22 triệu đồng tiền lãi. Hỏi bác Hưng đã đầu tư vào mỗi khoản bao nhiêu tiền?

7.9. Nhân dịp khai trương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để thu hút khách hàng. Tổng giá niêm yết của một chiếc ti vi loại A và một chiếc tủ lạnh loại B là 36,8 triệu đồng. Trong dịp này, ti vi loại A được giảm 30% và tủ lạnh loại B được giảm 25% nên bác Cường đã mua một chiếc ti vi và một chiếc tủ lạnh nói trên với tổng số tiền là 26,805 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi chiếc ti vi loại A và mỗi chiếc tủ lạnh loại B là bao nhiêu?

7.10. Bạn Nam đi xe đạp rời nhà lúc 14 giờ với vận tốc 12 km/h. Khi Hùng đến nhà Nam vào lúc 14 giờ 10 phút thì mẹ Nam chỉ hướng đường đi của Nam cho Hùng và Hùng đi xe đạp đuổi theo với vận tốc 18 km/h. Hỏi đến lúc mấy giờ thì Hùng đuổi kịp Nam?

7.11. Hai công ty viễn thông đưa ra hai gói cước cho điện thoại cố định như sau:

	Cước thuê bao hằng tháng (đồng)	Giá cước mỗi phút gọi (đồng)
Công ty A	32 000	900
Công ty B	38 000	700

a) Gọi x là số phút gọi trong tháng. Hãy biểu thị theo x, số tiền phải trả trong tháng (tính theo nghìn đồng) khi sử dụng mỗi gói cước nói trên.

b) Hỏi với bao nhiêu phút gọi thì số tiền phải trả trong tháng khi sử dụng dịch vụ của hai công ty viễn thông này là như nhau?

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1 Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{3}(x-2)-\frac{x-1}{2}=\frac{1}{5}(1-x).$$

Giải

$$\frac{1}{3}(x-2)-\frac{x-1}{2}=\frac{1}{5}(1-x)$$

$$\frac{10(x-2)-15(x-1)}{30}=\frac{6(1-x)}{30}$$ ← Quy đồng mẫu hai vế

$10(x-2)-15(x-1)=6(1-x)$ ← Nhân hai vế với 30 để khử mẫu

$10x-20-15x+15=6-6x$

$10x-15x+6x=6+20-15$ ← Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang vế trái, các hằng số sang vế phải

$x=11.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 11$.

Ví dụ 2

Một công ty cho thuê ô tô (có lái xe) tính phí cố định là 900 nghìn đồng một ngày và 10 nghìn đồng cho mỗi kilômét di chuyển. Bác Hưng thuê một chiếc ô tô trong hai ngày và phải trả 4,5 triệu đồng. Tính quãng đường mà bác Hưng đã di chuyển trên chiếc ô tô này trong hai ngày đó.

Giải

Đổi 4,5 triệu đồng = 4 500 nghìn đồng.

Gọi x (km) là quãng đường mà bác Hưng đã di chuyển trên chiếc ô tô trong hai ngày đó. Điều kiện: $x > 0$.

Số tiền bác Hưng phải trả khi di chuyển x kilômét là $10x$ (nghìn đồng).

Số tiền phí cố định mà bác Hưng phải trả cho 2 ngày thuê xe là $900 \cdot 2 = 1\,800$ (nghìn đồng).

Theo đề bài, ta có phương trình: $10x + 1\,800 = 4\,500$.

Giải phương trình: $10x + 1\,800 = 4\,500$

$x + 180 = 450$

$x = 450 - 180$

$x = 270.$

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy trong hai ngày đó, bác Hưng đã di chuyển quãng đường dài 270 km.

Ví dụ 3

Một người thợ kim hoàn có mười chiếc nhẫn, mỗi chiếc nặng 18 g, được làm bằng hợp kim gồm 10% bạc và 90% vàng. Người thợ quyết định nấu chảy những chiếc nhẫn và thêm đủ bạc để giảm hàm lượng vàng xuống còn 75%. Hỏi người thợ đó cần thêm bao nhiêu gam bạc?

Giải

Gọi x (g) là lượng bạc người thợ cần thêm vào. Điều kiện: $x > 0$.

Khối lượng của 10 chiếc nhẫn là $18 \cdot 10 = 180$ (g).

Lượng bạc có trong 10 chiếc nhẫn này là $0{,}1 \cdot 180 = 18$ (g).

Khối lượng bạc sau khi thêm x (g) vào là $18 + x$ (g) và khối lượng dung dịch nấu chảy là $180 + x$ (g).

Theo đề bài, ta có phương trình: $18 + x = 0{,}25(180 + x)$.

Giải phương trình:

$$18 + x = 0{,}25(180 + x)$$
$$18 + x = 45 + 0{,}25x$$
$$0{,}75x = 27$$
$$x = 36.$$

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy người thợ đó cần thêm 36 g bạc.

BÀI TẬP

7.12. Giải các phương trình sau:

a) $x - 3(2 - x) = 2x - 4$;

b) $\frac{1}{2}(x+5) - 4 = \frac{1}{3}(x-1)$;

c) $3(x - 2) - (x + 1) = 2x - 4$;

d) $3x - 4 = 2(x - 1) - (2 - x)$.

7.13. Bạn Nam giải phương trình $x(x + 1) = x(x + 2)$ như sau:

$$x(x + 1) = x(x + 2)$$
$$x + 1 = x + 2$$
$$x - x = 2 - 1$$
$$0x = 1 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Em có đồng ý với cách giải của bạn Nam không? Nếu không đồng ý, hãy trình bày cách giải của em.

7.14. Chu vi của một mảnh vườn hình chữ nhật là 42 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn, biết chiều rộng ngắn hơn chiều dài là 3 m.

7.15. Một chiếc áo len sau khi giảm giá 30% được bán với giá 399 nghìn đồng. Hỏi giá ban đầu của chiếc áo len đó là bao nhiêu?

7.16. Một xưởng may áo sơ mi dự định hoàn thành kế hoạch trong 25 ngày. Nhưng mỗi ngày đã vượt năng suất so với dự định là 2 áo nên đã hoàn thành sớm hơn 1 ngày và vượt kế hoạch được giao là 8 áo. Hỏi số áo sơ mi mà xưởng may được giao là bao nhiêu?

7.17. Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu luỹ tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi số điện (1 kWh) càng tăng theo các mức như sau:

Mức 1: Tính cho số điện từ 0 đến 50.

Mức 2: Tính cho số điện từ 51 đến 100, mỗi số điện đắt hơn 56 đồng so với mức 1.

Mức 3: Tính cho số điện từ 101 đến 200, mỗi số điện đắt hơn 280 đồng so với mức 2.

....

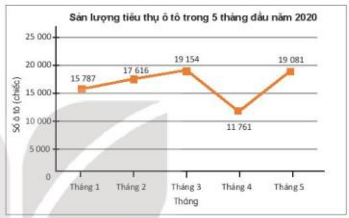
Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).

Tháng vừa qua, gia đình bạn Tuấn dùng hết 95 số điện và phải trả 178 123 đồng. Hỏi giá của mỗi số điện ở mức 1 là bao nhiêu?

Bài 27 KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hàm số • Biến số • Mặt phẳng toạ độ • Toạ độ của điểm • Đồ thị của hàm số	• Nhận biết những mô hình thực tế dẫn đến khái niệm hàm số. • Tính giá trị của hàm số khi hàm số đó xác định bởi công thức. • Xác định toạ độ của một điểm trên mặt phẳng toạ độ; xác định một điểm trên mặt phẳng toạ độ khi biết toạ độ của nó. • Nhận biết đồ thị hàm số.

Hình 7.1 là biểu đồ đoạn thẳng mô tả sản lượng tiêu thụ ô tô của thị trường Việt Nam trong 5 tháng đầu năm 2020. Em hãy cho biết trong tháng nào thì số lượng ô tô tiêu thụ là ít nhất.



Hình 7.1. (Theo Hiệp hội các nhà sản xuất ô tô Việt Nam (VAMA))

1 KHÁI NIỆM HÀM SỐ

Nhận biết khái niệm hàm số

HĐ1 Quãng đường đi được S (km) của một ô tô chuyển động với vận tốc 60 km/h được cho bởi công thức $S = 60t$, trong đó t (giờ) là thời gian ô tô di chuyển.

a) Tính và lập bảng các giá trị tương ứng của S khi t nhận các giá trị lần lượt là 1; 2; 3; 4 (giờ).

b) Với mỗi giá trị của t, ta xác định được bao nhiêu giá trị tương ứng của S?

HĐ2 Nhiệt độ T (°C) tại các thời điểm t (giờ) của Hà Nội vào một ngày được cho trong bảng sau:

t (giờ)	0	4	8	12	16	20
T (°C)	24	25	27	30	28	27

a) Hãy cho biết nhiệt độ của Hà Nội vào thời điểm 12 giờ trưa ngày hôm đó.

b) Với mỗi giá trị của t, ta xác định được bao nhiêu giá trị tương ứng của T?

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là **hàm số** của x và x gọi là **biến số**.

Chú ý. Khi y là hàm số của x, ta thường viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,... Chẳng hạn, với hàm số $y = 2x + 1$, ta còn viết $y = f(x) = 2x + 1$. Khi đó, thay cho câu "Khi x bằng 1 thì giá trị tương ứng của y là 3", ta viết ngắn gọn là $f(1) = 3$.

Hàm số có thể được cho bằng công thức (như ở HĐ1), bằng bảng (như ở HĐ2),...

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x) = 3x$. Lập bảng các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị lần lượt là -2; -1; 0; 1; 2.

Giải

Bảng các giá trị tương ứng của y:

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = 3x$	-6	-3	0	3	6

Ví dụ 2 Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho bởi các bảng sau. Đại lượng y có phải là một hàm số của đại lượng x không?

a)

x	-3	-2	2	4	6
y	-4	-6	6	3	2

b)

x	-2	-1	0	1	-2
y	-1	0	1	2	1

Giải

a) Đại lượng y là hàm số của x vì với mỗi giá trị của x ($x \in \{-3; -2; 2; 4; 6\}$), ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y.

b) Đại lượng y không phải là một hàm số của x vì với $x = -2$ ta xác định được hai giá trị tương ứng của y ($y = -1$ và $y = 1$).

Luyện tập 1

Viết công thức tính thời gian di chuyển t (giờ) của một ô tô chuyển động trên quãng đường dài 150 km với vận tốc không đổi v (km/h). Thời gian di chuyển t có phải là một hàm số của vận tốc v không? Tính giá trị của t khi $v = 60$ (km/h).

Vận dụng

Trở lại *tình huống mở đầu*, em hãy cho biết:

a) Tháng nào thì số lượng ô tô tiêu thụ là ít nhất và số lượng ô tô tiêu thụ trong tháng đó là bao nhiêu?

b) Nếu gọi y là số lượng ô tô tiêu thụ trong tháng x ($x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$) thì y có phải là một hàm số của x không? Tính giá trị của y khi $x = 5$.

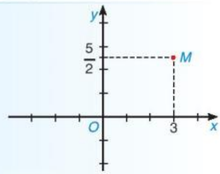
Đây là một ví dụ về hàm số cho bằng biểu đồ: Số lượng ô tô tiêu thụ là hàm số của tháng.

2 MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Ở lớp 7 các em đã biết mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực nào đó và ngược lại, mỗi số thực sẽ được biểu diễn bởi một điểm trên trục số. Liệu chúng ta có thể xác định được vị trí của một điểm bất kì trên mặt phẳng bằng cách tương tự không nhỉ?

Nhận biết toạ độ của một điểm trong mặt phẳng toạ độ

Trên mặt phẳng, ta vẽ hai trục số *Ox*, *Oy* vuông góc với nhau và cắt nhau tại gốc *O* của mỗi trục số như Hình 7.2. Các trục *Ox* và *Oy* gọi là các trục toạ độ, *Ox* thường vẽ nằm ngang và gọi là *trục hoành*, *Oy* thường vẽ thẳng đứng và gọi là *trục tung*, giao điểm *O* gọi là *gốc toạ độ*. Mặt phẳng có hệ trục toạ độ *Oxy* gọi là mặt phẳng toạ độ.



Hình 7.2

Lấy một điểm *M* bất kì trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*. Từ *M* kẻ các đường thẳng vuông góc với các trục toạ độ. Giả sử các đường vuông góc này cắt trục hoành tại điểm 3 và cắt trục tung tại điểm $\frac{5}{2}$. Khi đó cặp số $\left(3; \frac{5}{2}\right)$ gọi là *toạ độ* của điểm *M* và kí hiệu là $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$. Số 3 gọi là *hoành độ* và số $\frac{5}{2}$ gọi là *tung độ* của điểm *M*.

Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm).

Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi điểm *M* xác định duy nhất một cặp số $(x_0; y_0)$ và mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định duy nhất một điểm *M*.

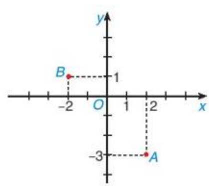
Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là toạ độ của điểm *M* và kí hiệu là $M(x_0; y_0)$, trong đó x_0 là hoành độ và y_0 là tung độ của điểm *M*.

❓ Hãy cho biết toạ độ của gốc toạ độ *O*.

Ví dụ 3

a) Viết toạ độ của các điểm *A*, *B* trong Hình 7.3.

b) Xác định các điểm *C*(0; –2) và *D*(–1; 0) trong Hình 7.3.

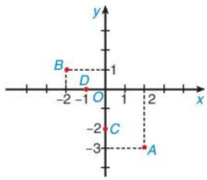


Hình 7.3

Giải

a) Ta có toạ độ của hai điểm *A*, *B* là: *A*(2; –3), *B*(–2; 1).

b) Các điểm $C(0; -2)$, $D(-1; 0)$ được xác định như Hình 7.4.



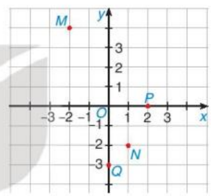
Hình 7.4

Các điểm có hoành độ (tung độ) bằng 0 nằm trên trục tung *Oy* (trục hoành *Ox*).

Luyện tập 2

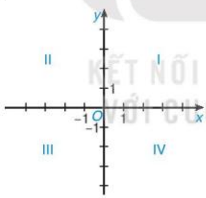
a) Xác định toạ độ của các điểm *M*, *N*, *P*, *Q* trong Hình 7.5.

b) Xác định các điểm $R(2; -2)$ và $S(-1; 2)$ trong Hình 7.5.



Hình 7.5

Chú ý. Hệ trục toạ độ *Oxy* chia mặt phẳng toạ độ thành 4 góc phần tư (góc phần tư thứ I, II, III, IV) như Hình 7.6.



Hình 7.6

Tranh luận

Những điểm có cả hoành độ và tung độ đều âm nằm ở góc phần tư thứ mấy?

Em nghĩ là nằm ở góc phần tư thứ II.

Không đúng, em nghĩ là nằm ở góc phần tư thứ III.

Ý kiến của em như thế nào?

3 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Nhận biết khái niệm đồ thị của hàm số

HĐ3 Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3

a) Viết tập hợp $\{(x;\ y)\}$ các cặp giá trị tương ứng của x và y.

b) Vẽ hệ trục toạ độ Oxy và biểu diễn các điểm có toạ độ là các cặp số trên. Tập hợp các điểm này gọi là *đồ thị* của hàm số $y = f(x)$ đã cho.

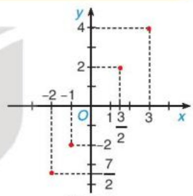
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x;\ y)$ trên mặt phẳng toạ độ.

Ví dụ 4 Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau:

x	-2	-1	$\frac{3}{2}$	3
y	$-\frac{7}{2}$	-2	2	4

Giải

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ gồm bốn điểm như Hình 7.7.



Hình 7.7

Luyện tập 3

Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau:

x	-3	-1	1	$2{,}5$
y	4	$3{,}5$	1	0

BÀI TẬP

7.18. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y cho bởi các bảng sau. Đại lượng y có phải là một hàm số của x không?

a)

x	-3	-1	0	2	4
y	1	1	1	1	1

b)

x	-2	1	0	1	2
y	-2	1	0	2	2

7.19. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4}{x}$.

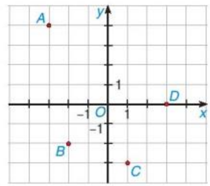
a) Tính $f(-4)$; $f(8)$.

b) Hoàn thành bảng sau vào vở:

x	-2	?	2	3	?
$y = f(x)$	?	-4	?	?	8

7.20. a) Xác định toạ độ của các điểm A; B; C; D trong Hình 7.8.

b) Xác định các điểm $E(0; -2)$ và $F(2; -1)$ trong Hình 7.8.



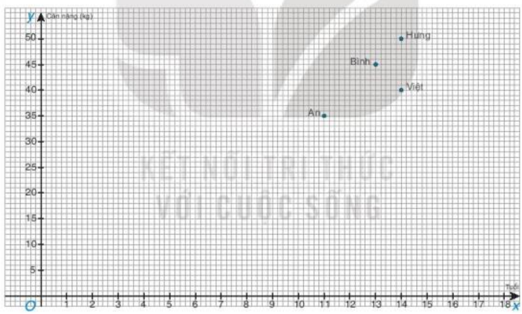
Hình 7.8

7.21. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-5	$-2{,}5$	0	$2{,}5$	5

Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

7.22. Cân nặng và tuổi của bốn bạn An, Bình, Hưng, Việt được biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ như Hình 7.9.



Hình 7.9

(Do số liệu về tuổi và cân nặng rất chênh lệch nên trong Hình 7.9, ta đã lấy một đơn vị dài trên trục tung bằng 5 lần đơn vị dài trên trục hoành).

Hãy cho biết:

a) Ai là người nặng nhất và nặng bao nhiêu?

b) Ai là người ít tuổi nhất và bao nhiêu tuổi?

c) Bình và Việt ai nặng hơn và ai nhiều tuổi hơn?

d) Thay dấu "?" bằng số thích hợp để hoàn thành bảng sau vào vở:

Tên	An	Bình	Hưng	Việt
Tuổi	?	?	?	?
Cân nặng (kg)	?	?	?	?

Theo bảng đã hoàn thành, cân nặng có phải là hàm số của tuổi không? Vì sao?

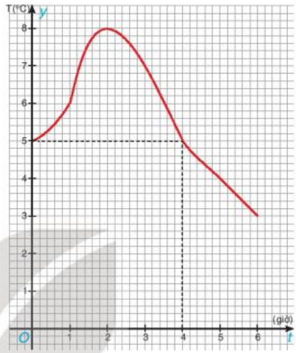
7.23. Hình 7.10 là đồ thị của hàm số mô tả nhiệt độ T (°C) tại các thời điểm t (giờ) của một thành phố ở châu Âu từ giữa trưa đến 6 giờ tối.

a) Tìm $T(1)$, $T(2)$, $T(5)$ và giải thích ý nghĩa của các số này.

b) Trong hai giá trị $T(1)$ và $T(4)$, giá trị nào lớn hơn?

c) Tìm t sao cho $T(t) = 5$.

d) Trong khoảng thời gian nào thì nhiệt độ cao hơn 5 °C?



Hình 7.10

EM CÓ BIẾT?

Nhà toán học René Descartes (1596 – 1650)

René Descartes là nhà triết học, nhà khoa học, nhà toán học người Pháp. Ông sinh ngày 31 tháng 3 năm 1596 ở La Haye en Touraine, ngày nay là vùng Descartes. Ông mất ngày 11 tháng 2 năm 1650 tại Stockholm, Thuỵ Điển.

René Descartes (1596 – 1650)

Đóng góp lớn nhất trong toán học của Descartes là đã giới thiệu khái niệm hệ toạ độ, ngày nay thường gọi là hệ toạ độ Descartes, cung cấp công cụ để có thể dùng đại số trong việc nghiên cứu hình học, giúp thống nhất đại số và hình học Euclid. Đóng góp này của ông có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của các lĩnh vực như hình học giải tích, phép tính vi tích phân và khoa học bản đồ.

Descartes cũng có những đóng góp về lí thuyết các đẳng thức. Ông là người đầu tiên đề xuất việc sử dụng những chữ cái cuối cùng của bảng chữ cái Latinh để chỉ các ẩn số và dùng những chữ cái đầu tiên của bảng chữ cái để chỉ các giá trị đã biết. Ông cũng đã sáng tạo ra hệ thống kí hiệu để mô tả luỹ thừa của các số (chẳng hạn trong biểu thức x^2). Mặt khác, chính ông đã thiết lập ra phương pháp, gọi là phương pháp dấu hiệu Descartes, để tìm số nghiệm âm và số nghiệm dương của một đa thức bất kì.

Bài 28 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hàm số bậc nhất • Đồ thị của hàm số bậc nhất	• Thiết lập bảng giá trị của hàm số bậc nhất. • Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất. • Vận dụng hàm số bậc nhất và đồ thị của hàm số bậc nhất vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Một ô tô đi từ bến xe Giáp Bát (Hà Nội) đến thành phố Vinh (Nghệ An) với vận tốc trung bình là 60 km/h. Hỏi sau t giờ ô tô đó cách trung tâm Hà Nội bao nhiêu kilômét? Biết rằng bến xe Giáp Bát cách trung tâm Hà Nội 7 km và coi rằng trung tâm Hà Nội, bến xe Giáp Bát và thành phố Vinh nằm trên cùng một đường thẳng.

1 KHÁI NIỆM HÀM SỐ BẬC NHẤT

Nhận biết hàm số bậc nhất

Xét *bài toán mở đầu.*

HĐ1 Viết công thức tính quãng đường S đi được của ô tô sau t giờ. Quãng đường S có phải là một hàm số của thời gian t không?

HĐ2 Viết công thức tính khoảng cách d từ vị trí của ô tô đến trung tâm Hà Nội sau t giờ.

HĐ3 Từ kết quả của HĐ2, hãy hoàn thành bảng sau vào vở:

t (giờ)	1	2	3	4	5
d (km)	?	?	?	?	?

Khoảng cách d có phải là một hàm số của thời gian t không?

> **Hàm số bậc nhất** là hàm số cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

Ví dụ 1

a) Nếu y tỉ lệ thuận với x, tức là $y = kx$ thì y là một hàm số bậc nhất của x với $a = k$, $b = 0$.

b) Hàm số $y = -2x + 3$ là một hàm số bậc nhất với $a = -2$; $b = 3$.

Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số bậc nhất?

a) $y = 3x - 2$; b) $y = -2x$; c) $y = 2x^2 + 3$; d) $y = 3(x - 1)$; e) $y = 0x + 1$.

Ví dụ 2 Cho hàm số bậc nhất $y = -2x + 5$.

a) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x + 5$	?	?	?	?	?

b) Tìm x sao cho $y = 12$.

Giải

a) Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x + 5$	9	7	5	3	1

b) Ta phải tìm x sao cho $y = 12$, tức là $-2x + 5 = 12$ hay $-2x = 7$, suy ra $x = -\frac{7}{2}$.

Vận dụng

Trong hệ đo lường Anh – Mỹ, quãng đường thường được đo bằng dặm (mile) và 1 dặm bằng khoảng 1,609 km.

a) Viết công thức để chuyển đổi x km sang y dặm. Công thức tính y theo x này có phải là một hàm số bậc nhất của x không?

b) Một ô tô chạy với vận tốc 55 dặm/giờ trên một quãng đường có hạn chế tốc độ tối đa là 80 km/h. Hỏi ô tô đó có vi phạm luật giao thông không?

Tranh luận

Theo em, Vuông và Tròn ai nói đúng? Vì sao?

2 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Nhận biết đồ thị của hàm số bậc nhất

Cho hàm số bậc nhất $y = 2x - 1$.

HĐ4 Hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x - 1$	?	?	?	?	?

HĐ5 Gọi A, B, C, D, E là các điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ có hoành độ x lần lượt là -2; -1; 0; 1; 2. Từ kết quả của HĐ4, hãy xác định toạ độ các điểm A, B, C, D, E.

HĐ6 Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm A, B, C, D, E trong HĐ5. Dùng thước thẳng để kiểm nghiệm rằng các điểm này cùng nằm trên một đường thẳng.

Người ta cũng chỉ ra rằng một điểm bất kì trên đường thẳng AB có toạ độ thoả mãn $y = 2x - 1$.

> Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng.

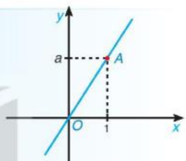
Chú ý. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$.

Cách vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị này, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Ta xét hai trường hợp:

- Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; a)$ như Hình 7.11.



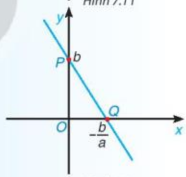
Hình 7.11

- Khi $b \neq 0$ ta thường xác định hai điểm đặc biệt trên đồ thị là giao của đồ thị với hai trục toạ độ như sau:

– Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $P(0; b)$ thuộc trục tung Oy.

– Cho $y = 0$ thì $x = -\dfrac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

– Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P, Q ta được đồ thị của hàm số $y = ax + b$ như Hình 7.12.



Hình 7.12

Ví dụ 3

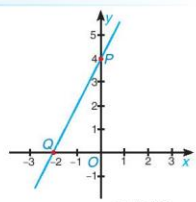
Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = 2x + 4$.

Giải. (H.7.13)

Cho $x = 0$ thì $y = 4$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Oy là $P(0; 4)$.

Cho $y = 0$ thì $x = -2$, ta được giao điểm của đồ thị với trục Ox là $Q(-2; 0)$.

Đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng PQ.



Hình 7.13

Luyện tập

Vẽ đồ thị của các hàm số bậc nhất $y = -2x + 3$ và $y = \dfrac{1}{2}x$.

BÀI TẬP

7.24. Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng.

a) $y = 0 \cdot x - 5$; b) $y = 1 - 3x$; c) $y = -0{,}6x$;

d) $y = \sqrt{2}(x - 1) + 3$; e) $y = 2x^2 + 1$.

7.25. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

a) Tìm hệ số a, biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 5$.

b) Với giá trị a tìm được, hãy hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-2	-1	0	1	2
y	?	?	?	?	?

7.26. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 6$; b) $y = -3x + 5$; c) $y = \frac{3}{2}x$.

7.27. Đồng euro (EUR) là đơn vị tiền tệ chính thức ở một số quốc gia thành viên của Liên minh châu Âu. Vào một ngày, tỉ giá hối đoái giữa đồng euro và đồng đô la Mỹ (USD) là: 1 EUR = 1,1052 USD.

a) Viết công thức để chuyển đổi x euro sang y đô la Mỹ. Công thức tính y theo x này có phải là một hàm số bậc nhất của x không?

b) Vào ngày đó, 200 euro có giá trị bằng bao nhiêu đô la Mỹ?

c) Vào ngày đó, 500 đô la Mỹ có giá trị bằng bao nhiêu euro?

7.28. Giá cước điện thoại cố định của một hãng viễn thông bao gồm cước thuê bao là 22 000 đồng/tháng và cước gọi là 800 đồng/phút.

a) Lập công thức tính số tiền cước điện thoại y (đồng) phải trả trong tháng khi gọi x phút.

b) Tính số tiền cước điện thoại phải trả khi gọi 75 phút.

c) Nếu số tiền cước điện thoại phải trả là 94 000 đồng thì trong tháng đó thuê bao đã gọi bao nhiêu phút?

7.29. Hàm chi phí đơn giản nhất là hàm chi phí bậc nhất $y = ax + b$, trong đó b biểu thị chi phí cố định của hoạt động kinh doanh và hệ số a biểu thị chi phí của mỗi mặt hàng được sản xuất. Giả sử rằng một xưởng sản xuất xe đạp có chi phí cố định hằng ngày là 36 triệu đồng và mỗi chiếc xe đạp có chi phí sản xuất là 1,8 triệu đồng.

a) Viết công thức của hàm số bậc nhất biểu thị chi phí y (triệu đồng) để sản xuất x (xe đạp) trong một ngày.

b) Vẽ đồ thị của hàm số thu được ở câu a.

c) Chi phí để sản xuất 15 chiếc xe đạp trong một ngày là bao nhiêu?

d) Có thể sản xuất bao nhiêu chiếc xe đạp trong ngày, nếu chi phí trong ngày đó là 72 triệu đồng?

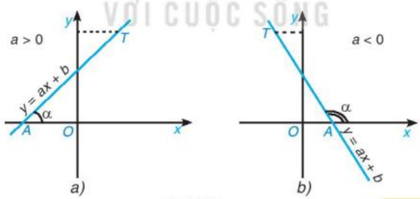
Bài 29 HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Hệ số góc của đường thẳng	• Nhận biết khái niệm hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). • Sử dụng hệ số góc của đường thẳng để nhận biết và giải thích sự cắt nhau hoặc song song của hai đường thẳng cho trước.

1 HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox

Trong mặt phẳng Oxy, góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox, T là một điểm nào đó thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương. Chú ý rằng $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ (H.7.14).



Hình 7.14

HĐ1 Trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ hai đường thẳng sau:

$$(d): y = 2x + 1 \text{ và } (d'): y = -2x + 1.$$

a) So sánh góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox với 90°.

b) So sánh góc tạo bởi đường thẳng (d') và trục Ox với 90°.

HĐ2 Từ kết quả của HĐ1, em có nhận xét gì về quan hệ giữa hệ số a của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ với góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox?

Vì có sự liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox nên ta có định nghĩa sau:

> Ta gọi a là **hệ số góc** của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

? Xác định hệ số góc của mỗi đường thẳng sau:

$$y = 3x - 1; \quad y = 2 - x; \quad y = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Nhận xét

- Khi hệ số góc a dương, đường thẳng $y = ax + b$ đi lên từ trái sang phải. Góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc nhọn (H.7.14a).
- Khi hệ số góc a âm, đường thẳng $y = ax + b$ đi xuống từ trái sang phải. Góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc tù (H.7.14b).

Ví dụ 1

Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng có hệ số góc $a = -2$ và đi qua điểm $(1; 2)$.

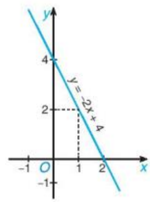
Giải. (H.7.15)

Hàm số bậc nhất cần tìm có dạng $y = -2x + b$.

Vì đường thẳng đi qua điểm $(1; 2)$ nên ta có:

$2 = -2 \cdot 1 + b$, suy ra $b = 4$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x + 4$.



Hình 7.15

Luyện tập 1

Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng có hệ số góc là 3 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Tranh luận

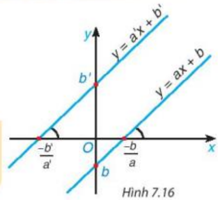
Đường thẳng $y = \frac{2x + 1}{2}$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Theo em, bạn nào trả lời đúng, bạn nào trả lời sai? Vì sao?

2 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Nhận biết hai đường thẳng song song

HĐ3 Trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ hai đường thẳng $y = 2x$ và $y = 2x + 1$. Có nhận xét gì về vị trí tương đối của hai đường thẳng này?



Hình 7.16

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ song song với nhau khi $a = a'$, $b \neq b'$ và ngược lại; trùng nhau khi $a = a'$, $b = b'$ và ngược lại.

? Tìm các cặp đường thẳng song song với nhau trong các đường thẳng sau:

a) $y = 2x + 1$; b) $y = -1 - 2x$; c) $y = 2 + 2x$; d) $y = -1 + 2x$.

Ví dụ 2

Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = (m + 1)x + 2$ $(m \neq -1)$ song song với đường thẳng $y = -2x + 1$.

Giải

Hai đường thẳng đã cho song song với nhau khi $m + 1 = -2$, tức là $m = -3$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện $m \neq -1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = -3$.

Nhận biết hai đường thẳng cắt nhau

HĐ4 Cho hai đường thẳng $y = 2x - 1$ và $y = x - 3$. Bằng cách so sánh hai hệ số góc, hãy cho biết hai đường thẳng này có song song hay trùng nhau không.

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ cắt nhau khi $a \neq a'$ và ngược lại.

? Tìm các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau:

a) $y = 2x + 1$; b) $y = 2x$; c) $y = 2 + 2x$; d) $y = 1 - 2x$.

Ví dụ 3

Tìm các giá trị của m để đường thẳng $y = mx - 2$ $(m \neq 0)$ cắt đường thẳng $y = -2x + 1$.

Giải

Hai đường thẳng đã cho cắt nhau khi $m \neq -2$.

Kết hợp với điều kiện đã cho, ta được các giá trị m cần tìm là: $m \neq 0$ và $m \neq -2$.

Luyện tập 2 Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2mx + 1$ và $y = (m - 1)x + 2$.

Tìm các giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

Thử thách nhỏ

Liệu hai đường thẳng phân biệt với cùng hệ số góc, có thể có:

a) Cùng giao điểm với trục Ox không?

b) Cùng giao điểm với trục Oy không?

Vận dụng

Em hãy trình bày cách làm của anh Pi để trả lời câu hỏi của bạn Vuông trong *tình huống mở đầu*.

BÀI TẬP

7.30. Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm $(1; -2)$ và có hệ số góc là 3.

7.31. Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng có hệ số góc là -2 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

7.32. Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng song song với nhau và các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau:

a) $y = -x + 1$;   b) $y = -2x + 1$;

c) $y = -2x + 2$;   d) $y = -x$.

7.33. Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx - 5$ và $y = (2m + 1)x + 3$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hai hàm số là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

7.34. Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ và đi qua điểm $(2; 6)$.

7.35. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 2$.

a) Vẽ hai đường thẳng đã cho trên cùng mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng đã cho.

c) Gọi B là giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ và trục Ox. Chứng minh tam giác OAB vuông tại A, tức là hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 2$ vuông góc với nhau.

d) Có nhận xét gì về tích hai hệ số góc của hai đường thẳng đã cho?

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 5$.

a) Xác định hệ số a, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$.

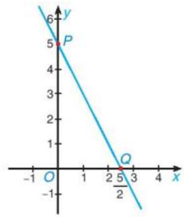
b) Vẽ đồ thị hàm số đã cho với giá trị a tìm được ở câu a.

Giải

a) Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 3)$ nên ta có:

$$3 = a + 5 \text{ hay } a = -2.$$

b) Với $a = -2$ ta có hàm số $y = -2x + 5$. Đồ thị của hàm số này là một đường thẳng.



Hình 7.17

Cho $x = 0$ thì $y = 5$, ta được giao điểm của đồ thị với trục tung là $P(0; 5)$.

Cho $y = 0$ thì $x = \frac{5}{2}$, ta được giao điểm của đồ thị với trục hoành là $Q\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Đồ thị của hàm số $y = -2x + 5$ là đường thẳng PQ (H.7.17).

Ví dụ 2

Số tiền điện phải trả trong tháng khi lượng điện sử dụng x (kWh) trong khoảng từ 51 kWh đến 100 kWh được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = 1\,734x - 2\,800 \text{ (đồng)}.$$

a) Tính số tiền điện phải trả khi lượng điện tiêu thụ trong tháng là 90 kWh.

b) Nếu số tiền điện phải trả trong tháng là 144 590 đồng thì gia đình đó đã sử dụng bao nhiêu kWh điện?

Giải

a) Khi $x = 90$ ta có: $T(90) = 1\,734 \cdot 90 - 2\,800 = 153\,260$.

Vậy khi lượng điện tiêu thụ trong tháng là 90 kWh thì số tiền điện phải trả là 153 260 đồng.

b) Ta phải tìm x sao cho $T(x) = 144\,590$, tức là

$$1\,734x - 2\,800 = 144\,590$$

$$1\,734x = 147\,390$$

$$x = 85 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy gia đình này đã sử dụng 85 kWh trong tháng đó.

BÀI TẬP

7.36. Cho hai hàm số $y = 2x - 1$ và $y = -x + 2$.

a) Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị trên.

7.37. Cho hàm số bậc nhất $y = (3 - m)x + 2m + 1$.

Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Đường thẳng đi qua điểm $(1; 2)$.

b) Đường thẳng cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại một điểm nằm trên trục tung.

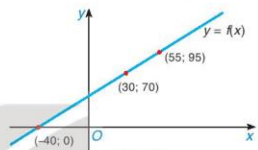
7.38. Cho đồ thị của một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ như Hình 7.18.

Hãy giải các phương trình sau:

a) $f(x) = 70$;

b) $f(x) = 95$;

c) $f(x) = 0$.



Hình 7.18

7.39. Giá cước taxi của một hãng xe taxi khi quãng đường di chuyển x (km) trong khoảng từ trên 1 km đến 30 km được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = 10\,000 + 13\,600 \cdot (x - 1) \text{ (đồng)}.$$

a) Tính số tiền phải trả khi xe di chuyển 20 km.

b) Nếu một hành khách phải trả 200 400 đồng thì hành khách đó đã di chuyển bao nhiêu kilômét?

7.40. Trong lí thuyết tài chính, *giá trị sổ sách* là giá trị của một tài sản mà công ty sử dụng để xây dựng bảng cân đối kế toán của mình. Một số công ty khấu hao tài sản của họ bằng cách sử dụng phương pháp khấu hao đường thẳng để giá trị của tài sản giảm một lượng cố định mỗi năm. Mức suy giảm phụ thuộc vào thời gian sử dụng hữu ích mà công ty đặt vào tài sản đó.

Giả sử một công ty vừa mua một chiếc máy photocopy mới với giá 18 triệu đồng. Công ty lựa chọn cách tính khấu hao chiếc máy photocopy này theo phương pháp khấu hao đường thẳng trong thời gian 3 năm, tức là mỗi năm giá trị của chiếc máy photocopy sẽ giảm $18 : 3 = 6$ triệu đồng.

a) Viết hàm số bậc nhất biểu thị giá trị sổ sách $V(x)$ của máy photocopy dưới dạng một hàm số theo thời gian sử dụng x (năm) của nó.

b) Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = V(x)$.

c) Giá trị sổ sách của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là bao nhiêu?

d) Sau thời gian sử dụng là bao lâu thì máy photocopy có giá trị sổ sách là 9 triệu đồng?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

7.41. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?

A. $0x + 2 = 0$. B. $2x + 1 = 2x + 2$.

C. $2x^2 + 1 = 0$. D. $3x - 1 = 0$.

7.42. Tập nghiệm S của phương trình $3(x + 1) - (x - 2) = 7 - 2x$ là

A. $S = \{0\}$. B. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

C. $S = \varnothing$. D. $S = \mathbb{R}$.

7.43. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất?

A. $y = 0x + 3$. B. $y = 3x^2 + 2$.

C. $y = 2x$. D. $y = 0$.

7.44. Đường thẳng có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $(-1; 2)$ là

A. $y = 2x + 2$. B. $y = 2x - 1$.

C. $y = -x + 2$. D. $y = 2x + 4$.

7.45. Giá trị m để đường thẳng $y = (m + 1)x + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x$ là

A. $m = -3$. B. $m = -2$.

C. $m = 2$. D. $m = 1$.

B. TỰ LUẬN

7.46. Giải các phương trình sau:

a) $5(x - 1) - (6 - 2x) = 8x - 3$; b) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5-3x}{2} = \frac{x+7}{4}$.

7.47. Số tiền thuế thu nhập cá nhân khi mức thu nhập chịu thuế trong năm trong khoảng từ trên 60 triệu đồng đến 120 triệu đồng được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = 0{,}1x - 3 \text{ (triệu đồng)},$$

trong đó $60 < x \leq 120$ (triệu đồng) là mức thu nhập chịu thuế của người đó trong năm.

a) Tính số thuế thu nhập phải đóng khi mức thu nhập chịu thuế trong năm là 100 triệu đồng.

b) Nếu một người phải đóng 8 triệu đồng tiền thuế thu nhập cá nhân thì mức thu nhập chịu thuế của người đó trong năm là bao nhiêu, biết rằng người đó có thu nhập chịu thuế trong khoảng từ trên 60 triệu đồng đến 120 triệu đồng?

7.48. Một cửa hàng sách giảm giá 30% cho một cuốn sách. Nếu giá mới của cuốn sách là 63 000 đồng, thì giá cũ của cuốn sách đó là bao nhiêu?

7.49. Hai ô tô cùng xuất phát từ Hà Nội đi Hạ Long lúc 8 giờ sáng, trên cùng một tuyến đường. Vận tốc trung bình của một ô tô lớn hơn 5 km/h so với ô tô kia. Xe đi nhanh hơn đến Hạ Long lúc 10 giờ 45 phút sáng, trước xe kia 15 phút. Hỏi vận tốc trung bình của mỗi ô tô là bao nhiêu? Tính độ dài quãng đường từ Hà Nội đến Hạ Long.

7.50. Cho hàm số bậc nhất $y = (m + 2)x + 3$.

a) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$.

b) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m tìm được ở câu a.

c) Tìm giao điểm A của đồ thị hàm số tìm được ở câu a và đồ thị của hàm số $y = x + 1$. Tính diện tích của tam giác OAB, trong đó B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + 1$ với trục Ox.

Chương VIII
MỞ ĐẦU VỀ TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

XÁC SUẤT

Trong chương này các em sẽ được biết cách tính xác suất của một số biến cố đơn giản và ước lượng xác suất của biến cố bằng xác suất thực nghiệm.

Bài 30 KẾT QUẢ CÓ THỂ VÀ KẾT QUẢ THUẬN LỢI

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Kết quả có thể • Kết quả thuận lợi	• Xác định các kết quả có thể của hành động, thực nghiệm. • Xác định các kết quả thuận lợi cho một biến cố liên quan tới hành động, thực nghiệm.

Tại vòng chung kết cuộc thi *Chinh phục tri thức*, ban tổ chức soạn 20 câu hỏi thuộc các lĩnh vực khác nhau, mỗi câu hỏi được viết trong một phiếu và được đánh số từ 1 đến 20. Các câu hỏi từ số 1 đến số 4 thuộc lĩnh vực Lịch sử – Địa lí, từ số 5 đến số 12 thuộc lĩnh vực Khoa học tự nhiên, từ số 13 đến số 18 thuộc lĩnh vực Văn học; từ số 19 đến số 20 thuộc lĩnh vực Toán học.

Bạn Sơn rút ngẫu nhiên một phiếu từ hộp đựng các phiếu câu hỏi. Sơn học giỏi môn Lịch sử nên mong rút được câu hỏi thuộc lĩnh vực Lịch sử – Địa lí.

Liệu bạn Sơn có rút được phiếu câu hỏi mình mong muốn không?

1 KẾT QUẢ CÓ THỂ CỦA HÀNH ĐỘNG, THỰC NGHIỆM

Kết quả có thể

HĐ1 Trong *tình huống mở đầu*, em hãy cho biết:

a) Bạn Sơn có chắc chắn rút được phiếu câu hỏi số 2 hay không?

b) Khi bạn Sơn rút một phiếu bất kì thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

Trong thực tế, ta thường gặp các hành động, thực nghiệm mà kết quả của chúng không thể biết trước khi thực hiện. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp ta có thể xác định được tất cả các kết quả có thể xảy ra (gọi tắt là các kết quả có thể) của hành động, thực nghiệm đó.

Ví dụ 1

Một hộp đựng 5 quả cầu màu xanh được đánh số 1; 2; 3; 4; 5 và 4 quả cầu màu đỏ được đánh số 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong hộp. Liệt kê tất cả các kết quả có thể của hành động này. Có bao nhiêu kết quả có thể?

Giải

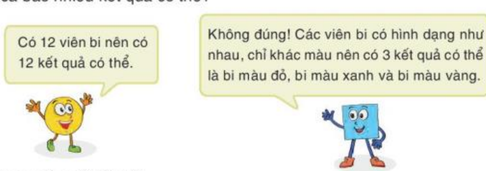
Kí hiệu 5 quả cầu màu xanh được đánh số 1; 2; 3; 4; 5 là X1, X2, X3, X4, X5 và 4 quả cầu màu đỏ được đánh số 1; 2; 3; 4 là D1, D2, D3, D4.
Các kết quả có thể của hành động này là X1, X2, X3, X4, X5, D1, D2, D3, D4.
Có tất cả 9 kết quả có thể.

Luyện tập 1

Chọn ngẫu nhiên một chữ cái trong cụm từ "TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ". Liệt kê tất cả các kết quả có thể của hành động này.

Tranh luận

Một túi đựng 12 viên bi có hình dạng như nhau, chỉ khác màu, trong đó có 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu xanh và 3 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi. Hỏi có tất cả bao nhiêu kết quả có thể?



Theo em, bạn nào nói đúng?

2 KẾT QUẢ THUẬN LỢI CHO MỘT BIẾN CỐ

Kết quả thuận lợi

Trở lại *tình huống mở đầu*, kết quả của hành động rút ngẫu nhiên một phiếu câu hỏi của Sơn là một câu hỏi nào đó trong số 20 câu hỏi được đánh số từ 1 đến 20. Có 20 kết quả có thể là phiếu số 1, phiếu số 2,..., phiếu số 20.

Xét biến cố *E*: "Sơn rút được phiếu câu hỏi thuộc lĩnh vực Lịch sử – Địa lí".

HĐ2 Em hãy xác định các kết quả có thể để biến cố *E* xảy ra.

Xét một biến cố *E*, mà *E* có xảy ra hay không xảy ra tuỳ thuộc vào kết quả của hành động, thực nghiệm *T*.

Một kết quả có thể của *T* để biến cố *E* xảy ra được gọi là **kết quả thuận lợi** cho biến cố *E*.

Ví dụ 2

Đội văn nghệ khối 8 của một trường Trung học cơ sở có 14 bạn, trong đó có 4 bạn nam lớp 8A, 5 bạn nữ lớp 8B, 3 bạn nam lớp 8C và 2 bạn nữ lớp 8D. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong đội văn nghệ khối 8 để tham gia tiết mục văn nghệ của trường.

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể của hành động trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể?

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

- *E*: "Chọn được một bạn lớp 8A";
- *F*: "Chọn được một bạn nữ".

Giải

Kí hiệu 4 bạn nam lớp 8A là A1, A2, A3, A4;

5 bạn nữ lớp 8B là B1, B2, B3, B4, B5;

3 bạn nam lớp 8C là C1, C2, C3;

2 bạn nữ lớp 8D là D1, D2.

a) Các kết quả có thể của hành động trên là A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, B5, C1, C2, C3, D1, D2. Có 14 kết quả có thể.

b) Biến cố *E* xảy ra khi ta chọn được một bạn lớp 8A. Do đó các kết quả thuận lợi cho biến cố *E* là A1, A2, A3, A4.

Biến cố *F* xảy ra khi ta chọn được một bạn nữ. Do đó các kết quả thuận lợi cho biến cố *F* là B1, B2, B3, B4, B5, D1, D2.

Luyện tập 2

Trở lại Ví dụ 2, hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

- *G*: "Chọn được một bạn nam";
- *H*: "Chọn được một bạn lớp 8C hoặc 8D".

BÀI TẬP

8.1. Vuông thực nghiệm gieo một con xúc xắc.

a) Liệt kê các kết quả có thể của thực nghiệm trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

- *A*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là hợp số";
- *B*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc nhỏ hơn 5";
- *C*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ".

8.2. Một hộp đựng 12 tấm thẻ, được ghi số 1; 2;...; 12. Bạn Nam rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp.

a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

- *A*: "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn";
- *B*: "Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố";
- *C*: "Rút được tấm thẻ ghi số chính phương".

8.3. Bạn An có 16 cuốn sách, trong đó có 4 cuốn sách tiểu thuyết, 5 cuốn sách Lịch sử, 3 cuốn sách Khoa học tự nhiên và 4 cuốn sách Toán. Các cuốn sách này được xếp tuỳ ý trong tủ sách. Bạn Bình đến chơi và lấy ngẫu nhiên một cuốn sách trong tủ sách của An.

a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

- *E*: "Bình lấy được một cuốn sách tiểu thuyết";
- *F*: "Bình lấy được một cuốn sách Khoa học tự nhiên hoặc cuốn sách Toán";
- *G*: "Bình lấy được một cuốn sách không phải là sách Lịch sử".

Bài 31 CÁCH TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ BẰNG TỈ SỐ

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Công thức tính xác suất	Tính xác suất bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố và số kết quả có thể trong trường hợp các kết quả có thể là đồng khả năng.

Một túi đựng 20 viên kẹo giống hệt nhau nhưng khác loại, trong đó có 7 viên kẹo sữa, 4 viên kẹo chanh, 6 viên kẹo dừa và 3 viên kẹo bạc hà. Bạn Lan lấy ngẫu nhiên một viên kẹo từ túi. Tính xác suất để Lan lấy được viên kẹo sữa.

Các viên kẹo giống hệt nhau, chỉ khác loại nên có 4 kết quả có thể là lấy được viên kẹo sữa, viên kẹo chanh, viên kẹo dừa và viên kẹo bạc hà. Do đó, xác suất để Lan lấy được viên kẹo sữa là $\frac{1}{4}$.

Không đúng, chỉ có 4 kết quả có thể nhưng chúng không đồng khả năng. Tớ thấy xác suất để Lan lấy được viên kẹo sữa là cao nhất vì trong túi có nhiều viên kẹo sữa nhất. Nhưng tớ không biết xác suất để Lan lấy được viên kẹo sữa chính xác là bao nhiêu?

Trong bài học này sẽ giúp các em trả lời được câu hỏi của bạn Tròn.

Cách tính xác suất bằng tỉ số

Muốn tính xác suất trong những tình huống tương tự như trên ta có công thức tính xác suất sau:

Giả thiết rằng các kết quả có thể của một hành động hay thực nghiệm là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố E, kí hiệu là $P(E)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và tổng số kết quả có thể.

$$P(E) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho } E}{\text{Tổng số kết quả có thể}}.$$

Nhận xét. Việc tính xác suất của một biến cố E trong một hành động hay thực nghiệm đồng khả năng sẽ gồm các bước sau:

Bước 1. Đếm các kết quả có thể (thường bằng cách liệt kê);

Bước 2. Chỉ ra các kết quả có thể là đồng khả năng;

Bước 3. Đếm các kết quả thuận lợi cho biến cố E;

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và tổng số kết quả có thể.

Ví dụ 1

Một tấm bìa cứng hình tròn được chia thành 12 hình quạt như nhau và đánh số 1; 2; 3;...; 12 (H.8.1), được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Quay tấm bìa xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại, tính xác suất của các biến cố sau:

Hình 8.1

a) A: "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố";

b) B: "Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chính phương".

Giải

Có 12 kết quả có thể, đó là 1; 2;...; 12. Do 12 hình quạt như nhau nên 12 kết quả có thể này là đồng khả năng.

a) Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là 2; 3; 5; 7; 11. Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A. Do đó, xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{5}{12}$.

b) Các kết quả thuận lợi cho biến cố B là 1; 4; 9. Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B. Do đó, xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Luyện tập 1

Trở lại *tình huống mở đầu*. Tính xác suất để Lan lấy được:

a) Viên kẹo sữa;

b) Viên kẹo chanh.

Ví dụ 2

Một hộp đựng 18 viên bi cùng khối lượng và kích thước, với hai màu đỏ và vàng, trong đó số viên bi màu vàng gấp đôi số viên bi màu đỏ. Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong hộp. Tính xác suất để Bình lấy được viên bi màu vàng.

Giải

Gọi x là số viên bi màu đỏ. Khi đó số viên bi màu vàng là $2x$.

Theo đề bài, ta có $x + 2x = 18$, hay $3x = 18$, tức là $x = 6$.

Do đó, số viên bi màu vàng là 12.

Do Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp có 18 viên nên có 18 kết quả có thể và các kết quả đó là đồng khả năng.

Vậy xác suất để Bình lấy được viên bi màu vàng là $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Luyện tập 2

Trên giá sách của thư viện có 15 cuốn sách, trong đó có một số cuốn tiểu thuyết. Người thủ thư đặt thêm 5 cuốn tiểu thuyết thư viện mới mua vào giá sách. Bạn Nam đến mượn sách, chọn ngẫu nhiên một cuốn sách trên giá. Biết rằng xác suất để chọn được cuốn tiểu thuyết là $\frac{3}{4}$. Hỏi lúc đầu trên giá sách có bao nhiêu cuốn tiểu thuyết?

Tranh luận

Một túi đựng 17 viên bi cùng khối lượng và kích thước, chỉ khác màu, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong túi. Tính xác suất của biến cố E: "Lấy được viên bi màu đỏ".

Có 17 viên bi nên có 17 kết quả có thể. Có 8 viên bi màu đỏ nên có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố E. Vậy $P(E) = \frac{8}{17}$.

Các viên bi cùng khối lượng và kích thước, chỉ khác màu, nên chỉ có 3 kết quả có thể là viên bi màu đỏ, viên bi màu trắng và viên bi màu vàng. Do đó $P(E) = \frac{1}{3}$.

Vuông và Tròn ai nói đúng? Tại sao?

BÀI TẬP

8.4. Một hình tròn được chia thành 20 hình quạt như nhau, đánh số từ 1; 2;...; 20 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm (H.8.2). Quay tấm bìa và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

Hình 8.2

Tính xác suất để mũi tên:

a) Chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4.

b) Chỉ vào hình quạt ghi số không phải là số nguyên tố.

8.5. Một túi đựng các viên kẹo giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 5 viên kẹo màu đen, 3 viên kẹo màu đỏ, 7 viên kẹo màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một viên kẹo trong túi.

Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Lấy được viên kẹo màu đen";

b) F: "Lấy được viên kẹo màu đen hoặc màu đỏ";

c) G: "Lấy được viên kẹo màu trắng";

d) H: "Không lấy được viên kẹo màu đỏ".

8.6. Trong một chiếc hộp có 15 tấm thẻ giống nhau được đánh số 10; 11;...; 24. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Rút được tấm thẻ ghi số lẻ";

b) B: "Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố".

8.7. *Trò chơi vòng quay may mắn.*

Một bánh xe hình tròn được chia thành 12 hình quạt như nhau, trong đó có 2 hình quạt ghi 100 điểm, 2 hình quạt ghi 200 điểm, 2 hình quạt ghi 300 điểm, 2 hình quạt ghi 400 điểm, 1 hình quạt ghi 500 điểm, 2 hình quạt ghi 1 000 điểm, 1 hình quạt ghi 2 000 điểm (H.8.3). Ở mỗi lượt, người chơi quay bánh xe. Mũi tên cố định gắn trên vành bánh xe dừng ở hình quạt nào thì người chơi nhận được số điểm ghi trên hình quạt đó.

Hình 8.3

Bạn Lan chơi trò chơi này. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Trong một lượt quay, Lan được 400 điểm";

b) B: "Trong một lượt quay, Lan được ít nhất 500 điểm".

Bài 32 MỐI LIÊN HỆ GIỮA XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM VỚI XÁC SUẤT VÀ ỨNG DỤNG

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Xác suất thực nghiệm	• Tính xác suất thực nghiệm trong một số ví dụ có tình huống thực tế. • Ước lượng xác suất của một biến cố bằng xác suất thực nghiệm. • Ứng dụng trong một số bài toán đơn giản.

Hình 8.4 là cảnh tắc đường ở đường Nguyễn Trãi (Hà Nội) vào giờ cao điểm buổi sáng, từ khoảng 7 giờ 30 phút đến 8 giờ. Liệu ta có thể tính được xác suất của biến cố "Tắc đường vào giờ cao điểm buổi sáng ở đường Nguyễn Trãi" hay không?

Hình 8.4

1 XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM CỦA MỘT BIẾN CỐ

Ở lớp 6, chúng ta đã biết khái niệm xác suất thực nghiệm của một sự kiện trong một số trò chơi, thí nghiệm đơn giản. Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu khái niệm xác suất thực nghiệm của một biến cố trong những tình huống thực tế.

HĐ1 Ông An theo dõi và thống kê số cuộc gọi điện thoại đến cho ông trong một ngày. Sau 59 ngày theo dõi, kết quả thu được như sau:

Số cuộc điện thoại gọi đến trong một ngày	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Số ngày	5	9	15	10	5	6	4	2	3

Gọi A là biến cố "Trong một ngày ông An nhận được nhiều hơn 6 cuộc gọi". Hỏi trong 59 ngày, có bao nhiêu ngày biến cố A xuất hiện?

Giả sử trong n lần thực nghiệm hoặc n lần theo dõi (quan sát) một hiện tượng ta thấy biến cố E xảy ra k lần. Khi đó xác suất thực nghiệm của biến cố E bằng $\frac{k}{n}$, tức là bằng tỉ số giữa số lần xuất hiện biến cố E và số lần thực hiện thực nghiệm hoặc theo dõi hiện tượng đó.

Ví dụ 1

Trở lại tình huống trong HĐ1. Gọi E là biến cố "Trong một ngày ông An nhận được ít nhất 5 cuộc gọi điện thoại" và F là biến cố "Trong một ngày ông An nhận được nhiều nhất 3 cuộc điện thoại". Tính xác suất thực nghiệm của biến cố E và biến cố F.

Giải

- Trong 59 ngày theo dõi có 6 ngày có 5 cuộc gọi, 4 ngày có 6 cuộc gọi, 2 ngày có 7 cuộc gọi và 3 ngày có 8 cuộc gọi.

Do đó, số ngày có ít nhất 5 cuộc gọi là 6 + 4 + 2 + 3 = 15 (ngày).

Như vậy trong 59 ngày theo dõi, ông An thấy biến cố E xảy ra 15 lần.

Vậy xác suất thực nghiệm của biến cố E là $\frac{15}{59}$.

- Trong 59 ngày theo dõi có 5 ngày không có cuộc gọi, 9 ngày có 1 cuộc gọi, 15 ngày có 2 cuộc gọi và 10 ngày có 3 cuộc gọi.

Do đó, số ngày có nhiều nhất 3 cuộc gọi là 5 + 9 + 15 + 10 = 39 (ngày).

Như vậy trong 59 ngày theo dõi, ông An thấy biến cố F xảy ra 39 lần.

Vậy xác suất thực nghiệm của biến cố F là $\frac{39}{59}$.

Luyện tập 1

Một cửa hàng thống kê số lượng các loại điện thoại bán được trong một năm vừa qua như sau:

Loại điện thoại	A	B	C
Số lượng bán được (chiếc)	712	1 035	1 085

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố E: "Chiếc điện thoại loại A được bán ra trong năm đó của cửa hàng".

2 MỐI LIÊN HỆ GIỮA XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM VỚI XÁC SUẤT

Ta đã biết khả năng xảy ra của một biến cố được đo lường bằng một số nhận giá trị từ 0 đến 1, gọi là *xác suất* của biến cố đó. Trong Bài 31, ta đã có công thức tính xác suất của một biến cố với giả thiết rằng các kết quả có thể của một hành động hay thực nghiệm là đồng khả năng.

Tuy nhiên trong nhiều tình huống, giả thiết trên không thoả mãn. Người ta thấy rằng có thể *ước lượng xác suất của một biến cố nhờ xác suất thực nghiệm*.

Xác suất của biến cố E được ước lượng bằng xác suất thực nghiệm của E:

$$P(E) \approx \frac{k}{n};$$

trong đó n là số lần thực nghiệm hay theo dõi một hiện tượng,

k là số lần biến cố E xảy ra.

Ví dụ 2

Kiểm tra ngẫu nhiên 500 chiếc ti vi do nhà máy X sản xuất thì có 4 chiếc không đạt chất lượng. Hãy ước lượng xác suất của biến cố E: "Một ti vi của nhà máy X sản xuất không đạt chất lượng".

Giải

Trong 500 lần quan sát ta thấy biến cố E xảy ra 4 lần.

Do đó, xác suất thực nghiệm của biến cố E là $\frac{4}{500} = 0{,}008 = 0{,}8\%$.

Vậy xác suất của biến cố E được ước lượng là 0,8%.

Luyện tập 2

Trở lại *tình huống mở đầu*. Giả sử camera quan sát đường Nguyễn Trãi trong 365 ngày ghi nhận được 217 ngày tắc đường vào giờ cao điểm buổi sáng. Từ số liệu thống kê đó, hãy ước lượng xác suất của biến cố E: "Tắc đường vào giờ cao điểm buổi sáng ở đường Nguyễn Trãi".

Ví dụ 3

Thống kê tới ngày 26-12-2021, toàn thế giới có 279 830 788 người nhiễm Covid-19, trong đó có 5 413 126 người tử vong. (Theo *www.worldometers.info*).

Hãy ước lượng xác suất người nhiễm Covid-19 bị tử vong.

Giải

Theo dõi 279 830 788 người nhiễm Covid-19 và thống kê có 5 413 126 người tử vong. Vậy xác suất thực nghiệm của biến cố "Người nhiễm Covid-19 bị tử vong" là

$$\frac{5\,413\,126}{279\,830\,788} \approx 0{,}0193 = 1{,}93\%.$$

Vậy xác suất người nhiễm Covid-19 bị tử vong được ước lượng là 1,93%.

Luyện tập 3

Trong 240 000 trẻ sơ sinh chào đời người ta thấy có 123 120 bé trai. Hãy ước lượng xác suất của biến cố "Trẻ sơ sinh là bé gái".

3 ỨNG DỤNG

Xác suất thực nghiệm có thể sử dụng để đưa ra dự báo số lần xảy ra một sự kiện, hiện tượng trong tương lai.

Ví dụ 4

Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử, kiểm tra chất lượng của 100 sản phẩm. Kết quả được ghi trong bảng sau:

Số lỗi	0	1	> 1
Số sản phẩm	62	35	3

a) Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Hãy tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

A: "Sản phẩm không có lỗi";

B: "Sản phẩm có đúng 1 lỗi";

C: "Sản phẩm có nhiều hơn 1 lỗi".

b) Nếu kiểm tra 120 sản phẩm khác, hãy dự đoán:

- Có bao nhiêu sản phẩm không có lỗi?
- Có bao nhiêu sản phẩm có đúng 1 lỗi?
- Có bao nhiêu sản phẩm nhiều hơn 1 lỗi?

Giải

a) Xác suất thực nghiệm của các biến cố *A*, *B* và *C* tương ứng là

$$\frac{62}{100} = 0{,}62; \ \frac{35}{100} = 0{,}35 \text{ và } \frac{3}{100} = 0{,}03.$$

Vậy ta có các ước lượng sau: $P(A) \approx 0{,}62$; $P(B) \approx 0{,}35$; $P(C) \approx 0{,}03$.

b) Khi kiểm tra 120 sản phẩm khác.

- Gọi k là số sản phẩm không có lỗi.

Ta có $P(A) \approx \frac{k}{120}$. Thay giá trị ước lượng của $P(A)$ ở trên, ta được

$$\frac{k}{120} \approx 0{,}62. \text{ Suy ra } k \approx 120 \cdot 0{,}62 = 74{,}4.$$

Vậy có khoảng 74 sản phẩm không có lỗi.

- Gọi h là số sản phẩm có đúng 1 lỗi.

Ta có $P(B) \approx \frac{h}{120}$. Thay giá trị ước lượng của $P(B)$ ở trên, ta được

$$\frac{h}{120} \approx 0{,}35. \text{ Suy ra } h \approx 120 \cdot 0{,}35 = 42.$$

Vậy có khoảng 42 sản phẩm có đúng 1 lỗi.

- Gọi m là số sản phẩm có nhiều hơn 1 lỗi.

Ta có $P(C) \approx \frac{m}{120}$. Thay giá trị ước lượng của $P(C)$ ở trên, ta được

$$\frac{m}{120} \approx 0{,}03. \text{ Suy ra } m \approx 120 \cdot 0{,}03 = 3{,}6.$$

Vậy có khoảng 4 sản phẩm có nhiều hơn 1 lỗi.

Như vậy, ta dự đoán kết quả khi kiểm tra 120 sản phẩm khác như sau:

Số lỗi	0	1	> 1
Số sản phẩm	74	42	4

Luyện tập 4

Thống kê điểm kiểm tra cuối năm môn Toán của một nhóm 100 học sinh lớp 8 được chọn ngẫu nhiên tại ba lớp của trường Trung học cơ sở X, thu được kết quả như bảng sau:

Số điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	7	9	11	11	12	12	13	9	8	8

a) Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X. Hãy tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

- A: "Học sinh đó có điểm nhỏ hơn hoặc bằng 5";
- B: "Học sinh đó có điểm từ 4 đến 9".

b) Hãy dự đoán trong nhóm 80 học sinh lớp 8 chọn ngẫu nhiên từ ba lớp khác của trường X:

- Có bao nhiêu học sinh có số điểm không vượt quá 5 điểm?
- Có bao nhiêu học sinh có số điểm từ 4 đến 9 điểm?

BÀI TẬP

8.8. Tung một chiếc kẹp giấy 145 lần xuống sàn nhà lát gạch đá hoa hình vuông. Quan sát thấy có 113 lần chiếc kẹp nằm hoàn toàn bên trong hình vuông và 32 lần chiếc kẹp nằm trên cạnh hình vuông. Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

a) E: "Chiếc kẹp giấy nằm hoàn toàn trong hình vuông";

b) F: "Chiếc kẹp giấy nằm trên cạnh của hình vuông".

8.9. Một nhân viên kiểm tra chất lượng sản phẩm tại một nhà máy trong 20 ngày rồi ghi lại số phế phẩm của nhà máy mỗi ngày và thu được kết quả như sau:

Số phế phẩm	0	1	2	3	≥ 4
Số ngày	14	3	1	1	1

Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

a) M: "Trong một ngày nhà máy đó không có phế phẩm";

b) N: "Trong một ngày nhà máy đó chỉ có 1 phế phẩm";

c) K: "Trong một ngày nhà máy đó có ít nhất 2 phế phẩm".

8.10. Thống kê thời gian của 78 chương trình quảng cáo trên Đài truyền hình tỉnh X cho kết quả như sau:

Thời gian quảng cáo trong khoảng	Số chương trình quảng cáo
Từ 0 đến 19 giây	17
Từ 20 đến 39 giây	38
Từ 40 đến 59 giây	19
Trên 60 giây	4

Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

a) *E*: "Chương trình quảng cáo của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài từ 20 đến 39 giây";

b) *F*: "Chương trình quảng cáo của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài trên 1 phút";

c) *G*: "Chương trình quảng cáo của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài trong khoảng từ 20 đến 59 giây".

8.11. Thống kê về số ca nhiễm bệnh và số ca tử vong của bệnh SARS và bệnh EBOLA được kết quả như sau:

Bệnh	Số người nhiễm	Số người tử vong
SARS (11 – 2002 đến 7 – 2003)	8 437	813
EBOLA (2014 – 2016)	34 453	15 158

(Theo *www.worldometers.info*)

Căn cứ vào bảng thống kê trên, hãy ước lượng xác suất một người tử vong khi nhiễm bệnh SARS, bệnh EBOLA.

8.12. Một nhà máy sản xuất máy điều hoà tiến hành kiểm tra chất lượng của 600 chiếc điều hoà được sản xuất và thấy có 5 chiếc bị lỗi. Trong một lô hàng có 1 500 chiếc điều hoà. Hãy dự đoán xem có khoảng bao nhiêu chiếc điều hoà không bị lỗi.

8.13. Hai bạn Mai và Việt lần lượt thực hiện việc gieo đồng thời hai con xúc xắc và ở mỗi lần gieo sẽ nhận được số điểm bằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc. Mai được gieo 100 lần và Việt được gieo 120 lần. Mai gieo trước và ghi lại kết quả của mình như sau:

Số điểm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lần	3	5	9	10	14	16	13	11	8	7	4

Trước khi Việt gieo, hãy dự đoán xem có bao nhiêu lần số điểm của Việt nhận được là:

a) Một số chẵn;

b) Một số nguyên tố;

c) Một số lớn hơn 7.

EM CÓ BIẾT?

Tính gần đúng số π bằng cách tung kim

Tỉ số giữa chu vi và đường kính của một đường tròn tuỳ ý luôn không đổi và được kí hiệu là π. Số π là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn; 13 chữ số đầu trong cách viết thập phân của π là 3,141592653589...

Trên mặt phẳng, kẻ các đường thẳng song song với nhau, cách đều nhau một khoảng bằng d. Lấy một chiếc kim có độ dài h ném ngẫu nhiên lên mặt phẳng đó. Gọi E là biến cố "Chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ". Nhà toán học Pháp G.L. Buffon (1707 – 1788) đã chứng minh được rằng:

$$P(E) = \frac{2h}{\pi d}.$$

Giả sử ném chiếc kim n lần, các đường thẳng song song cách đều nhau một khoảng d và thấy có k lần chiếc kim cắt đường thẳng. Khi đó xác suất thực nghiệm của E là $\frac{k}{n}$. Vậy $P(E) \approx \frac{k}{n}$. Suy ra $\frac{2h}{\pi d} \approx \frac{k}{n}$. Từ đó $\pi \approx \frac{2hn}{kd}$.

Nếu chọn độ dài chiếc kim $h = \frac{d}{2}$ thì $\pi \approx \frac{n}{k}$.

Buffon đã thực hiện 2 212 lần ném chiếc kim có độ dài 1 cm lên mặt phẳng được kẻ bởi các đường thẳng song song với nhau, cách nhau một khoảng 2 cm và quan sát thấy có 704 lần kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ.

Vậy $\pi \approx \frac{2\,212}{704} \approx 3{,}142045...$

Năm 1901, nhà toán học Lazzerini đã tăng số lần ném kim lên và tìm được

$$\pi \approx 3{,}1415929.$$

Ngày nay trong Cung khoa học "Các phát minh" ở Pháp có đặt một dụng cụ cho phép khách tham quan tự tính gần đúng số π bằng cách tung kim.

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Một hộp đựng 36 tấm thẻ giống nhau được đánh số 1; 2; 3;...; 36. Bạn Nam rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Rút được tấm thẻ ghi số chia hết cho 4";

b) F: "Rút được tấm thẻ ghi số là bội của 4 hoặc 6";

c) G: "Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố".

Giải

Có 36 kết quả có thể, đó là 1; 2; 3;...; 36. Do rút ngẫu nhiên nên các kết quả có thể này là đồng khả năng.

a) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố E là: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36.

Vậy $P(E) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Có 12 kết quả thuận lợi cho biến cố F là: 4; 6; 8; 12; 16; 18; 20; 24; 28; 30; 32; 36.

Vậy $P(F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

c) Có 11 kết quả thuận lợi cho biến cố G là: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31.

Vậy $P(G) = \frac{11}{36}$.

Ví dụ 2

Một cơ quan quản lí đã thống kê được số lượt khách đến tham quan di tích X trong năm qua như sau:

Tháng	1; 2	3; 4	5; 6	7; 8	9; 10	11; 12
Số lượt khách	137	181	148	117	116	111

a) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố E: "Khách đến tham quan di tích trong tháng 7 và tháng 8";

b) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố F: "Khách đến tham quan di tích trong thời gian từ tháng 7 đến tháng 12";

c) Giả sử năm tới có 1 196 lượt khách đến tham quan di tích. Hãy dự đoán xem:

• Có bao nhiêu lượt khách đến tham quan di tích trong tháng 7 và tháng 8.

• Có bao nhiêu lượt khách đến tham quan di tích trong thời gian từ tháng 7 đến tháng 12.

Giải

a) Số lượt khách tham quan di tích trong năm qua là

$$137 + 181 + 148 + 117 + 116 + 111 = 810.$$

Có 117 lượt khách tham quan vào tháng 7, tháng 8.

Vậy xác suất thực nghiệm của biến cố E là $\frac{117}{810} \approx 0,144$.

b) Số lượt khách tham quan di tích từ tháng 7 đến tháng 12 trong năm qua là

$$117 + 116 + 111 = 344.$$

Vậy xác suất thực nghiệm của biến cố F là $\frac{344}{810} \approx 0,425$.

c) Ta có $1\,196 \cdot \frac{117}{810} \approx 172,76$. Vậy ta dự đoán trong năm tới có khoảng 173 lượt khách tham quan di tích vào tháng 7 và tháng 8.

Ta có $1\,196 \cdot \frac{344}{810} \approx 507,93$. Vậy ta dự đoán trong năm tới có khoảng 508 lượt khách tham quan di tích trong thời gian từ tháng 7 đến tháng 12.

BÀI TẬP

8.14. Gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc khác 6";

b) B: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bé hơn 3";

c) C: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 2";

d) D: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số nguyên tố".

8.15. Một túi đựng các quả bóng giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 15 quả bóng màu xanh, 13 quả bóng màu đỏ và 17 quả bóng màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong túi. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) C: "Lấy được quả bóng màu xanh";

b) D: "Lấy được quả bóng màu đỏ";

c) E: "Không lấy được quả bóng màu trắng".

8.16. Trong trò chơi "Xúc xắc may mắn", ở mỗi ván chơi, người chơi gieo đồng thời hai con xúc xắc và ghi lại tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc. Một người chơi 80 ván và ghi lại kết quả trong bảng sau:

Tổng số chấm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số ván	2	5	6	8	11	14	12	9	6	4	3

a) Giả sử người chơi thắng nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là 5 hoặc 7. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố E: "Người chơi thắng trong một ván chơi".

b) Giả sử người chơi thắng nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ nhất là 10. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố F: "Người chơi thắng trong một ván chơi".

8.17. Thống kê số vụ tai nạn giao thông trong hai tháng 8 và 9 của thành phố X được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông xảy ra trong một ngày	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Số ngày	4	9	15	10	8	6	4	3	2

Từ bảng thống kê trên, hãy dự đoán xem trong ba tháng 10; 11; 12 tới tại thành phố X:

a) Có bao nhiêu ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông.

b) Có bao nhiêu ngày có ít nhất 5 vụ tai nạn giao thông.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các Bài 8.18; 8.19.

Lớp 8A gồm 38 học sinh, trong đó có 18 bạn nữ. Có 6 bạn nữ tham gia câu lạc bộ thể thao và 8 bạn nam không tham gia câu lạc bộ thể thao. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp.

8.18. Xác suất để học sinh đó là một bạn nam có tham gia câu lạc bộ thể thao là

A. $\frac{7}{20}$.   B. $\frac{6}{19}$.   C. $\frac{8}{21}$.   D. $\frac{9}{23}$.

8.19. Xác suất để học sinh đó là một bạn **không** tham gia câu lạc bộ thể thao là

A. $\frac{11}{20}$.   B. $\frac{12}{19}$.   C. $\frac{13}{21}$.   D. $\frac{10}{19}$.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các Bài 8.20; 8.21.

Một túi đựng các quả cầu giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 26 quả màu đỏ, 62 quả màu tím, 8 quả màu vàng, 9 quả màu trắng và 12 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong túi.

8.20. Xác suất để lấy được quả cầu màu tím là

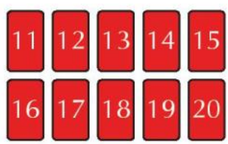
A. $\frac{62}{117}$.   B. $\frac{60}{117}$.   C. $\frac{63}{118}$.   D. $\frac{65}{118}$.

8.21. Xác suất để lấy được quả cầu màu trắng là

A. $\frac{11}{117}$.   B. $\frac{9}{117}$.   C. $\frac{13}{118}$.   D. $\frac{15}{118}$.

B. TỰ LUẬN

8.22. Trong một hộp có 10 tấm thẻ giống nhau được đánh số 11; 12;...; 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp.



a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

E: "Rút được tấm thẻ ghi số là bội của 3";

F: "Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố".

8.23. Một túi đựng các viên bi giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 5 viên bi màu xanh, 3 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu trắng. Bạn Việt lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *E*: "Việt lấy được viên bi màu xanh";

b) *F*: "Việt lấy được viên bi màu đỏ";

c) *G*: "Việt lấy được viên bi màu trắng";

d) *H*: "Việt lấy được viên bi màu xanh hoặc màu đỏ";

e) *K*: "Việt không lấy được viên bi màu đỏ".

8.24. Chọn ngẫu nhiên một số có hai chữ số. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *A*: "Số được chọn nhỏ hơn 20";

b) *B*: "Số được chọn là số chính phương".

8.25. Trong một phòng có 15 học sinh lớp 8A gồm 9 bạn nam, 6 bạn nữ và 15 học sinh lớp 8B gồm 12 bạn nam, 3 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong phòng. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *E*: "Chọn được một học sinh nam";

b) *F*: "Chọn được một học sinh nam lớp 8B";

c) *G*: "Chọn được một học sinh nữ lớp 8A".

8.26. Bảng sau đây thống kê kết quả khảo sát số người thích một bộ phim mới tại 5 quận A, B, C, D, E của thành phố X.

Quận	Số người khảo sát		Số người thích bộ phim mới	
	Nam	Nữ	Nam	Nữ
A	45	51	10	11
B	36	42	9	6
C	52	49	13	13
D	28	33	9	10
E	40	39	7	4
Tổng số	201	214	48	44

a) Chọn ngẫu nhiên một người ở quận C. Ước lượng xác suất của biến cố:

A: "Người được chọn thích bộ phim đó".

b) Chọn ngẫu nhiên một người ở quận E. Ước lượng xác suất của biến cố:

B: "Người được chọn không thích bộ phim đó".

c) Chọn ngẫu nhiên 600 người ở thành phố X. Ước lượng trong đó có bao nhiêu người thích bộ phim đó?

d) Chọn ngẫu nhiên 500 người nữ ở thành phố X. Ước lượng trong đó có bao nhiêu người thích bộ phim đó?

Chương IX
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

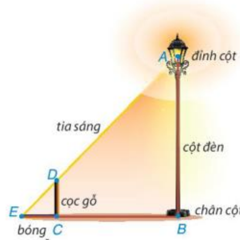
HÌNH HỌC PHẲNG

Các em gặp rất nhiều hình ảnh trong cuộc sống và thế giới tự nhiên được tạo nên bởi các hình giống nhau. Chẳng hạn, những toà nhà trong thành phố, những bông hoa trên cây,... Những hình như vậy trong mặt phẳng ta gọi là hình đồng dạng. Trong chương này các em sẽ được tìm hiểu về chúng, đặc biệt là các tam giác đồng dạng.

Bài 33 HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hai tam giác đồng dạng • Tỉ số đồng dạng	• Nhận biết hai tam giác đồng dạng và giải thích các tính chất của chúng. • Giải thích định lí về trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác.

Có một chiếc bóng điện được mắc trên đỉnh (điểm A) của cột đèn thẳng đứng. Để tính chiều cao AB của cột đèn, bác Dương cắm một chiếc cọc gỗ (đoạn CD) thẳng đứng trên mặt đất rồi đo chiều dài bóng của cọc gỗ do ánh đèn điện tạo ra và đo khoảng cách từ điểm E đến chân cột đèn (điểm B) (H.9.1). Theo em, bác Dương đã tính như thế nào để ra được chiều cao cột đèn?



Hình 9.1

1 ĐỊNH NGHĨA

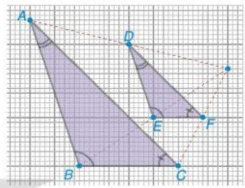
Chúng ta đã biết hai tam giác bằng nhau sẽ có các góc tương ứng bằng nhau và hình dạng giống nhau. Trong bài này chúng ta sẽ tìm hiểu một trường hợp mà hai tam giác có thể không bằng nhau những vẫn có các góc bằng nhau và hình dạng giống nhau.

Hai tam giác đồng dạng

HĐ1 Trong Hình 9.2, ΔABC và ΔDEF là hai tam giác có các cạnh tương ứng song song và các góc tương ứng bằng nhau, tức là $AB \mathbin{/\!/} DE$, $AC \mathbin{/\!/} DF$, $BC \mathbin{/\!/} EF$ và $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$.

Nhìn hình vẽ, hãy cho biết giá trị của các tỉ số sau:

$$\frac{AB}{DE}; \frac{BC}{EF}; \frac{AC}{DF}.$$



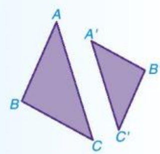
Hình 9.2

Hai tam giác như Hình 9.2 được gọi là *hai tam giác đồng dạng*. Cụ thể, ta có định nghĩa về hai tam giác đồng dạng như sau :

Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}; \widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B}, \widehat{C'} = \widehat{C}.$$

Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC được kí hiệu là $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (viết theo thứ tự cặp đỉnh tương ứng).



Tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ được gọi là *tỉ số đồng dạng* của $\Delta A'B'C'$ với ΔABC.

Nhận xét

- $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng k thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$.

Do vậy khi $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ thì ta nói hai tam giác $A'B'C'$ và ABC đồng dạng với nhau.

- Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau theo tỉ số đồng dạng $k = 1$. Đặc biệt mọi tam giác đồng dạng với chính nó.
- Nếu $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng k và $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng m thì $\Delta A''B''C'' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k \cdot m$.

Ví dụ 1

Cho ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác đều có $AB = 4$ cm, $A'B' = 3$ cm. Chứng minh rằng $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và tìm tỉ số đồng dạng.

Giải

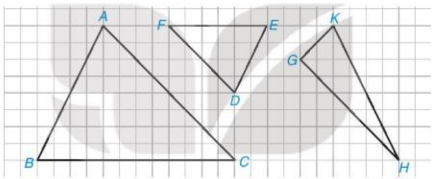
Ta có: $BC = CA = AB = 4$ cm, $B'C' = C'A' = A'B' = 3$ cm, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^o$ và $\widehat{A'} = \widehat{B'} = \widehat{C'} = 60^o$.

Do vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{3}{4}$ và $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$.

Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $\dfrac{3}{4}$.

Luyện tập 1

Trong các tam giác được vẽ trên ô lưới vuông (H.9.3), có một cặp tam giác đồng dạng. Hãy chỉ ra cặp tam giác đó, viết đúng kí hiệu đồng dạng và tìm tỉ số đồng dạng của chúng.



Hình 9.3

Thử thách nhỏ

Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$. Chứng minh rằng:

a) Nếu tam giác ABC cân tại đỉnh A thì tam giác MNP cân tại đỉnh M.

b) Nếu tam giác ABC đều thì tam giác MNP đều.

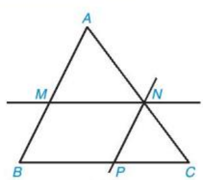
c) Nếu $AB \geq AC \geq BC$ thì $MN \geq MP \geq NP$.

2 ĐỊNH LÍ

Tìm hiểu định lí

HĐ2 Cho tam giác ABC và các điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho MN song song với BC như Hình 9.4.

– Hãy viết các cặp góc bằng nhau của hai tam giác ABC và AMN, giải thích vì sao chúng bằng nhau.



Hình 9.4

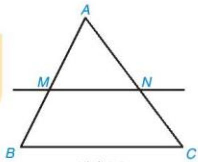
– Kẻ đường thẳng đi qua N song song với AB và cắt BC tại P. Hãy chứng tỏ $MN = BP$ và suy ra $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$.

– Tam giác ABC và tam giác AMN có đồng dạng không? Nếu có hãy viết đúng kí hiệu đồng dạng.

Tổng quát, ta có định lí sau:

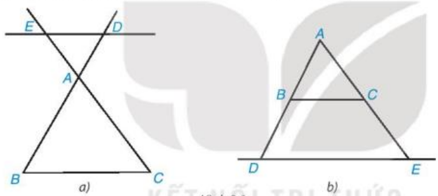
> Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC$, $MN \parallel BC$ ($M \in AB$; $N \in AC$).
KL	$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.



Hình 9.5

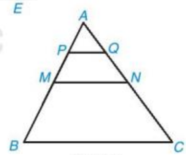
Chú ý. Định lí trên vẫn đúng nếu thay bằng đường thẳng cắt phần kéo dài của hai cạnh tam giác. Chẳng hạn, trong Hình 9.6 có $ED \parallel BC$. Khi đó, $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.



Hình 9.6

Ví dụ 2

Cho Hình 9.7, trong đó M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; P, Q lần lượt là trung điểm của AM, AN. Hãy liệt kê tất cả các cặp tam giác (phân biệt) đồng dạng.



Hình 9.7

Giải

Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Suy ra $MN \parallel BC$. (1)

Do đó $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ (theo định lí trên).

Tương tự, PQ là đường trung bình của tam giác AMN nên $PQ \parallel MN$. (2)

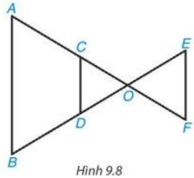
Do đó $\triangle APQ \backsim \triangle AMN$ (theo định lí trên).

Từ (1) và (2), suy ra $PQ \parallel BC$. Do đó $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$ (theo định lí trên).

Vậy có tất cả ba cặp tam giác đồng dạng là: $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$; $\triangle APQ \backsim \triangle AMN$ và $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$.

Luyện tập 2

Trong Hình 9.8, các đường thẳng AB, CD, EF song song với nhau. Hãy liệt kê ba cặp tam giác (phân biệt) đồng dạng.



Hình 9.8

Vận dụng

Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy giải thích bác Dương đã tính được chiều cao cột đèn như thế nào, biết cọc gỗ cao 1 m, EC = 80 cm và EB = 4 m.

BÀI TẬP

9.1. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$, khẳng định nào sau đây **không** đúng?

a) $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$.

b) $\Delta BCA \backsim \Delta NPM$.

c) $\Delta CAB \backsim \Delta PMN$.

d) $\Delta ACB \backsim \Delta MNP$.

9.2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau.

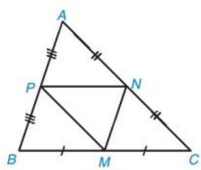
b) Hai tam giác bất kì đồng dạng với nhau.

c) Hai tam giác đều bất kì đồng dạng với nhau.

d) Hai tam giác vuông bất kì đồng dạng với nhau.

e) Hai tam giác đồng dạng thì bằng nhau.

9.3. Trong Hình 9.9, ABC là tam giác không cân; M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Hãy tìm trong hình năm tam giác khác nhau mà chúng đôi một đồng dạng với nhau. Giải thích vì sao chúng đồng dạng.



Hình 9.9

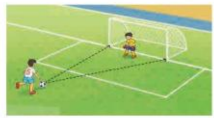
9.4. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và tam giác MNP cân tại đỉnh M. Biết rằng $\widehat{BAC} = \widehat{PMN}$, $AB = 2MN$. Chứng minh $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$ và tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 34 BA TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC

Kiến thức, kĩ năng

- Ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác.
- Áp dụng các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vào các vấn đề thực tiễn.

Trong môn bóng đá, độ khó của mỗi pha ghi bàn còn được tính bởi góc sút vào cầu môn là rộng hay hẹp. Nếu biết độ rộng của khung thành là 7,32 m, trái bóng cách hai cột gôn lần lượt là 10,98 m và 14,64 m thì em có cách nào để đo được góc sút ở vị trí này bởi các dụng cụ học tập không?



Hình 9.10

1 TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC

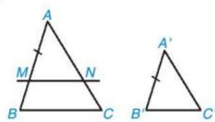
Để kiểm tra hai tam giác đồng dạng ta có nhất thiết phải kiểm tra tất cả các góc bằng nhau và độ dài tất cả các cạnh tỉ lệ với nhau không?

Trường hợp đồng dạng cạnh – cạnh – cạnh

HĐ1 Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

a) Nếu $A'B' = AB$ thì hai tam giác có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

b) Nếu $A'B' < AB$ như Hình 9.11. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M sao cho $AM = A'B'$. Kẻ đường thẳng qua M song song với BC và cắt AC tại N.



Hình 9.11

– Hãy giải thích vì sao $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$.

– Hãy chứng tỏ rằng $AN = A'C'$, $MN = B'C'$ để suy ra $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ (c.c.c).

– Hai tam giác $A'B'C'$ và ABC có đồng dạng với nhau không? Nếu có, em hãy viết đúng kí hiệu đồng dạng giữa chúng.

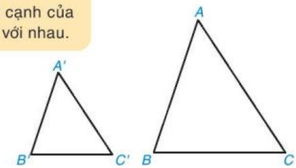
c) Nếu $A'B' > AB$ thì tam giác $A'B'C'$ có đồng dạng với tam giác ABC không? Vì sao?

Tổng quát, ta có định lí sau:

Định lí (trường hợp đồng dạng cạnh – cạnh – cạnh)

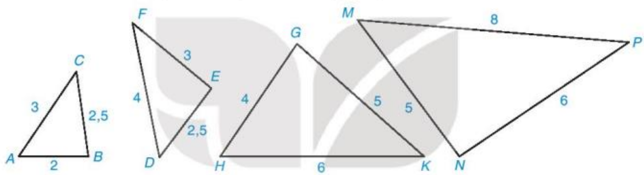
> Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.12

? Những cặp tam giác nào dưới đây (H.9.13) là đồng dạng? (Các kích thước được tính theo đơn vị centimét). Viết đúng kí hiệu đồng dạng.



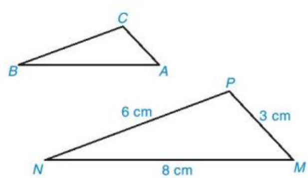
Hình 9.13

Ví dụ 1

Cho các tam giác ABC và MNP có $3AB = 4BC = 8CA$, $MN = 8$ cm, $NP = 6$ cm, $PM = 3$ cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.

Giải. (H.9.14)

GT	ΔABC, ΔMNP, $3AB = 4BC = 8CA$, $MN = 8$ cm, $NP = 6$ cm, $PM = 3$ cm.
KL	$\Delta ABC \backsim \Delta MNP$.



Hình 9.14

Từ giả thiết ta có: $3MN = 4NP = 8PM$

và $3AB = 4BC = 8CA$.

Vậy ΔABC và ΔMNP có: $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$.

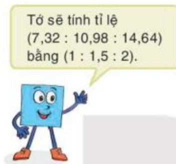
Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta MNP$ (c.c.c).

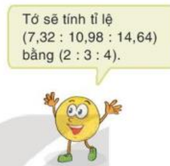
Luyện tập 1

Cho tam giác *ABC* có chu vi bằng 18 cm và tam giác *DEF* có chu vi bằng 27 cm. Biết rằng $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 6$ cm, $FD = 12$ cm. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$.

Vận dụng

Trở lại *tình huống mở đầu*. Em hãy vẽ một tam giác có ba cạnh tỉ lệ với ba cạnh của tam giác tạo bởi ba đỉnh là trái bóng và hai chân cột gôn. Từ đó tính góc sút bằng góc tương ứng của tam giác vừa vẽ được.



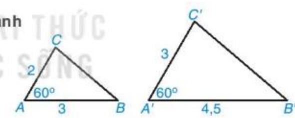


2 TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI CỦA TAM GIÁC

Nếu không đo tất cả các cạnh của hai tam giác, ta có cách nào để kiểm tra hai tam giác đó đồng dạng hay không?

Trường hợp đồng dạng cạnh – góc – cạnh

HĐ2 Cho hai tam giác *ABC* và *A'B'C'* có độ dài các cạnh (theo đơn vị cm) như Hình 9.15. Biết rằng $\widehat{A} = \widehat{A'}$.



Hình 9.15

– So sánh các tỉ số $\dfrac{A'B'}{AB}, \dfrac{A'C'}{AC}$.

– Dùng thước có vạch chia đo độ dài *BC*, *B'C'* và tính tỉ số $\dfrac{B'C'}{BC}$.

– Theo em, tam giác *A'B'C'* có đồng dạng với tam giác *ABC* không? Nếu có thì tỉ số đồng dạng là bao nhiêu?

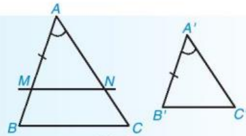
Tổng quát, ta có định lí sau:

Định lí (trường hợp đồng dạng cạnh – góc – cạnh)

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Chứng minh định lí (H.9.16)

GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$, $\widehat{A'} = \widehat{A}$.
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.16

- Nếu $A'B' = AB$ thì $A'C' = AC$. Do đó $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ (c.g.c). Suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.
- Nếu $A'B' \neq AB$ thì không mất tính tổng quát, ta giả sử $A'B' < AB$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = A'B'$. Kẻ đường thẳng qua M song song với BC, cắt AC tại N.

Vì $MN \,//\, BC$ nên $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ (theo định lí trang 81). Do đó ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

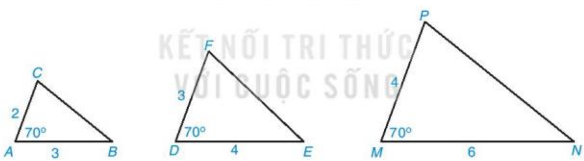
Kết hợp với $AM = A'B'$ và giả thiết $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ ta suy ra: $AN = A'C'$.

Hai tam giác AMN và $A'B'C'$ có:

$AM = A'B'$ (theo cách dựng), $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (theo giả thiết), $AN = A'C'$ (chứng minh trên).

Vậy $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ (c.g.c). Vì $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

? Những cặp tam giác nào trong Hình 9.17 là đồng dạng? (Các kích thước được tính theo đơn vị centimét). Viết đúng kí hiệu đồng dạng.



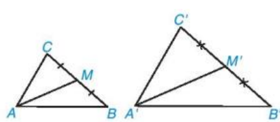
Hình 9.17

Ví dụ 2

Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$.

Giải. (H.9.18)

GT	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$, $M \in BC$, $M' \in B'C'$, $BM = MC$, $B'M' = M'C'$.
KL	$\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$.



Hình 9.18

Vì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ nên $\widehat{B'} = \widehat{B}$ và $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

Do M, M' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$ nên $\frac{M'B'}{MB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$.

Hai tam giác $A'B'M'$ và ABM có: $\frac{M'B'}{MB} = \frac{A'B'}{AB}$ và $\widehat{B'} = \widehat{B}$ (theo chứng minh trên).

Vậy $\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$ (c.g.c).

Nhận xét. Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số k và AM, $A'M'$ lần lượt là các đường trung tuyến của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{A'M'}{AM} = k$.

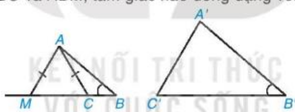
Luyện tập 2

Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$. Trên tia đối của các tia CB, $C'B'$ lần lượt lấy các điểm M, M' sao cho $\frac{MC}{MB} = \frac{M'C'}{M'B'}$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$.

Tranh luận

1. Bạn Lan nhận xét rằng nếu tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ và $\widehat{B'} = \widehat{B}$ thì chúng đồng dạng. Theo em, bạn Lan nhận xét có đúng không? Vì sao?

Gợi ý. Khi góc ACB tù, lấy điểm M trên tia BC sao cho ΔAMC cân (H.9.19) rồi xét xem trong hai tam giác ABC và ABM, tam giác nào đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.



Hình 9.19

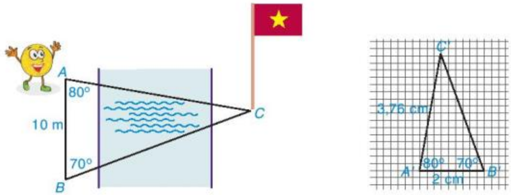
2. Nếu thêm giả thiết $\widehat{C}$ và $\widehat{C'}$ đều là góc nhọn thì hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có đồng dạng không?

3 TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA CỦA TAM GIÁC

Nếu chỉ đo các góc của hai tam giác, ta có thể kiểm tra được hai tam giác đó có đồng dạng không?

Trường hợp đồng dạng góc – góc

Bạn Tròn đang đứng ở vị trí điểm A bên bờ sông và nhờ anh Pi tính giúp khoảng cách từ chỗ mình đứng đến chân một cột cờ tại điểm C bên kia sông (H.9.20a). Anh Pi lấy một vị trí B sao cho AB = 10 m, $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{BAC} = 80^\circ$ và vẽ một tam giác $A'B'C'$ trên giấy với $A'B'$ = 2 cm, $\widehat{A'B'C'} = 70^\circ$, $\widehat{B'A'C'} = 80^\circ$ (H.9.20b).



a) b)

Hình 9.20

HĐ3 Em hãy dự đoán xem tam giác $A'B'C'$ có đồng dạng với tam giác ABC không? Nếu có thì tỉ số đồng dạng là bao nhiêu?

HĐ4 Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và anh Pi đo được $A'C' = 3{,}76$ cm thì khoảng cách từ bạn Tròn đến chân cột cờ là bao nhiêu mét?

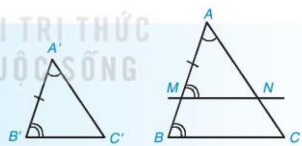
Tổng quát, ta có định lí sau:

Định lí (trường hợp đồng dạng góc – góc)

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Chứng minh định lí (H.9.21)

GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$ $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$.
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.21

- Nếu $A'B' = AB$ thì $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ (g.c.g). Suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.
- Nếu $A'B' \neq AB$ thì không mất tính tổng quát, ta giả sử $A'B' < AB$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = A'B'$. Kẻ đường thẳng qua M song song với BC, cắt AC tại N.

Vì $MN \parallel BC$ nên $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ (theo định lí trang 81).

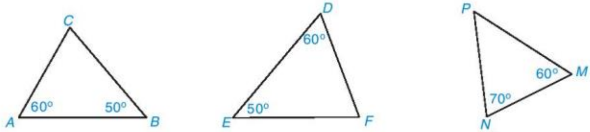
Do đó ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Hai tam giác AMN và $A'B'C'$ có:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ (theo giả thiết), $AM = A'B'$ (theo cách dựng), $\widehat{AMN} = \widehat{A'B'C'}$ (chứng minh trên).

Vậy $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ (g.c.g). Vì $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

❓ Những cặp tam giác nào trong Hình 9.22 là đồng dạng? Viết đúng kí hiệu đồng dạng.

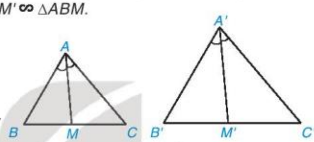


Hình 9.22

Ví dụ 3

Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ và AM, $A'M'$ lần lượt là các đường phân giác của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$.

Giải. (H.9.23)



Hình 9.23

GT	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$, $M \in BC$, $M' \in B'C'$, $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$, $\widehat{B'A'M'} = \widehat{M'A'C'}$.
KL	$\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$.

Vì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ nên $\widehat{B'} = \widehat{B}$ và $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

Vì AM, $A'M'$ lần lượt là các đường phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{B'A'C'}$

nên $\widehat{B'A'M'} = \dfrac{\widehat{B'A'C'}}{2} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAM}$.

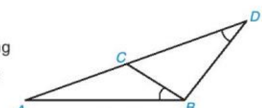
Hai tam giác ABM và $A'B'M'$ có $\widehat{A'B'M'} = \widehat{ABM}$, $\widehat{B'A'M'} = \widehat{BAM}$ (theo chứng minh trên).

Vậy $\Delta A'B'M' \backsim \Delta ABM$ (g.g).

Nhận xét. Nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số k và AM, $A'M'$ lần lượt là các đường phân giác của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\dfrac{A'M'}{AM} = k$.

Luyện tập 3

Cho các điểm A, B, C, D như Hình 9.24. Biết rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$. Hãy chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta ADB$ và $AB^2 = AD \cdot AC$.



Hình 9.24

Thử thách nhỏ

Biết rằng ba đường phân giác của tam giác ABC đồng quy tại I, ba đường phân giác của tam giác $A'B'C'$ đồng quy tại I'. Hãy chứng tỏ rằng nếu $\widehat{A'I'B'} = \widehat{AIB}$ và $\widehat{A'I'C'} = \widehat{AIC}$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

BÀI TẬP

9.5. Khẳng định nào sau đây chứng tỏ rằng hai tam giác đồng dạng?

a) Ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh tam giác kia.

b) Hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh tam giác kia và có một cặp góc bằng nhau.

c) Hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia.

d) Hai cạnh của tam giác này bằng hai cạnh của tam giác kia.

9.6. Cho hai tam giác đồng dạng. Tam giác thứ nhất có độ dài ba cạnh là 4 cm, 8 cm và 10 cm. Tam giác thứ hai có chu vi là 33 cm. Độ dài ba cạnh của tam giác thứ hai là bộ ba nào sau đây?

a) 6 cm, 12 cm, 15 cm. b) 8 cm, 16 cm, 20 cm.

c) 6 cm, 9 cm, 18 cm. d) 8 cm, 10 cm, 15 cm.

9.7. Cho AM, BN, CP là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Cho $A'M'$, $B'N'$, $C'P'$ là các đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$. Biết rằng $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Chứng minh rằng $\dfrac{A'M'}{AM} = \dfrac{B'N'}{BN} = \dfrac{C'P'}{CP}$.

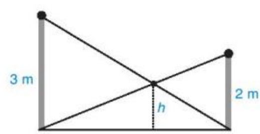
9.8. Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm. Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 10$ cm, $AN = 8$ cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta ANM$.

9.9. Cho góc BAC và các điểm M, N lần lượt trên các đoạn thẳng AB, AC sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABN \backsim \Delta ACM$.

b) Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng $IB \cdot IN = IC \cdot IM$.

9.10. Có hai chiếc cột dựng thẳng đứng trên mặt đất với chiều cao lần lượt là 3 m và 2 m. Người ta nối hai sợi dây từ đỉnh cột này đến chân cột kia và hai sợi dây cắt nhau tại một điểm (H.9.25), hãy tính độ cao h của điểm đó so với mặt đất.

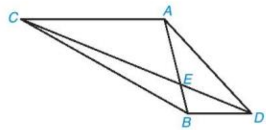


Hình 9.25

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho các điểm A, B, C, D, E như Hình 9.26, biết rằng $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $AD = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $BD = 4$ cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta BDA$ và $\Delta BDE \backsim \Delta ACE$.



Hình 9.26

Giải

Hai tam giác ABC và BDA có: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{BA} = \dfrac{BC}{DA} = \dfrac{3}{2}$.

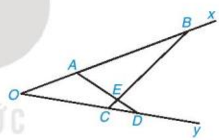
Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta BDA$ (c.c.c). Từ đó suy ra $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$.

Do đó, $AC \,//\, BD$ (có hai góc so le trong bằng nhau).

Vậy đường thẳng AC song song với cạnh BD của tam giác BDE và cắt hai cạnh BE, DE kéo dài lần lượt tại A và C. Suy ra $\Delta BDE \backsim \Delta ACE$.

Ví dụ 2

Cho góc xOy, các điểm A, B nằm trên tia Ox và các điểm C, D nằm trên tia Oy như Hình 9.27, sao cho $OA = 2$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 3$ cm, $OD = 4$ cm. Biết AD cắt BC tại điểm E. Hãy tính tỉ số $\dfrac{BE}{DE}$.



Hình 9.27

Giải

GT	Góc xOy; $A, B \in Ox$; $C, D \in Oy$; $OA = 2$ cm, $OB = 6$ cm, $OC = 3$ cm, $OD = 4$ cm; AD cắt BC tại E.
KL	Tính $\dfrac{BE}{DE}$.

Hai tam giác OAD và OCB có: $\hat{O}$ chung, $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ODA} = \widehat{OBC}$ (*).

Hai tam giác AEB và CED có:

$\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ (hai góc đối đỉnh), $\widehat{ABE} = \widehat{CDE}$ (theo (*)).

Vậy $\Delta AEB \backsim \Delta CED$ (g.g). Do đó $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{OB - OA}{OD - OC} = \dfrac{4}{1} = 4$.

BÀI TẬP

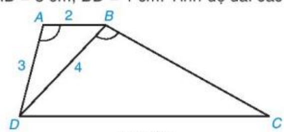
9.11. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$. Biết $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{E} = 80^\circ$, hãy tính số đo các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{F}$.

9.12. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$. Biết $AB = 3$ cm, $A'B' = 6$ cm và tam giác ABC có chu vi bằng 10 cm. Hãy tính chu vi tam giác $A'B'C'$.

9.13. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \mathbin{/\!/} CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$ (H.9.28).

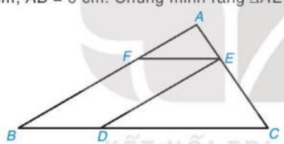
a) Chứng minh rằng $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$.

b) Giả sử $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính độ dài các cạnh BC và DC.



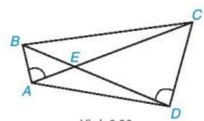
Hình 9.28

9.14. Cho các điểm A, B, C, D, E, F như Hình 9.29. Biết rằng $DE \mathbin{/\!/} AB$, $EF \mathbin{/\!/} BC$, $DE = 4$ cm, $AB = 6$ cm. Chứng minh rằng $\Delta AEF \backsim \Delta ECD$ và tính tỉ số đồng dạng.



Hình 9.29

9.15. Cho các điểm A, B, C, D, E như Hình 9.30. Biết rằng $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$. Chứng minh rằng $\Delta AED \backsim \Delta BEC$.



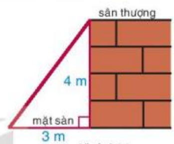
Hình 9.30

9.16. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \mathbin{/\!/} CD$) và các điểm M, N lần lượt trên cạnh AD và BC sao cho $2AM = MD$, $2BN = NC$. Biết $AB = 5$ cm, $CD = 6$ cm. Hãy tính độ dài đoạn thẳng MN.

Bài 35 ĐỊNH LÍ PYTHAGORE VÀ ỨNG DỤNG

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Định lí Pythagore	• Giải thích định lí Pythagore. • Tính độ dài cạnh trong tam giác vuông bằng cách sử dụng định lí Pythagore. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc vận dụng định lí Pythagore.

Bác thợ muốn xây một cầu thang bắc từ mặt sàn lên sân thượng. Biết rằng bức tường từ sàn lên sân thượng cao 4 m, chân cầu thang cách bức tường 3 m (H.9.31). Hỏi chiều dài của cầu thang là bao nhiêu mét?



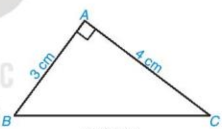
Hình 9.31

1 ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Độ dài ba cạnh trong một tam giác vuông có liên hệ gì với nhau không?

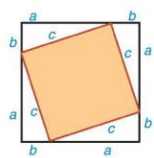
Định lí Pythagore

HĐ1 Cho tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm (H.9.32). Hãy đo độ dài cạnh BC và so sánh hai đại lượng $AB^2 + AC^2$ với BC^2.



Hình 9.32

HĐ2 Lấy giấy trắng cắt bốn tam giác vuông bằng nhau. Gọi a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của các tam giác vuông này. Cắt một hình vuông bằng tấm bìa có cạnh dài $a + b$. Dán bốn tam giác vuông lên tấm bìa như Hình 9.33.



Hình 9.33

– Dùng ê ke kiểm tra xem phần bìa không bị che lấp có phải là hình vuông cạnh bằng c không. Từ đó tính diện tích phần bìa này theo c.

– Tổng diện tích bốn tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông a, b là bao nhiêu?

– Diện tích cả tấm bìa hình vuông cạnh $a + b$ bằng bao nhiêu?

– So sánh $c^2 + 2ab$ với $(a + b)^2$ để rút ra nhận xét về mối quan hệ giữa hai đại lượng c^2 và $a^2 + b^2$.

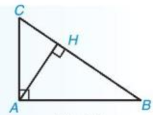
Từ các hoạt động trên, ta có định lí sau:

Định lí Pythagore

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

Chứng minh định lí (H.9.34)

GT	ΔABC, $\widehat{A} = 90^\circ$
KL	$BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Hình 9.34

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

Hai tam giác ABC và HBA có: $\widehat{BAC} = 90^\circ = \widehat{BHA}$, $\widehat{B}$ chung.

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AB}{HB} = \dfrac{BC}{AB}$ hay $AB^2 = HB \cdot BC$. (1)

Tương tự, $\Delta ABC \backsim \Delta HAC$. Suy ra $\dfrac{AC}{HC} = \dfrac{BC}{AC}$ hay $AC^2 = HC \cdot BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB^2 + AC^2 = (HB + HC) \cdot BC = BC^2$.

Chú ý. Người ta cũng chứng minh được định lí sau đây (định lí Pythagore đảo):

Nếu tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bình phương của một đoạn thẳng là bình phương độ dài của đoạn thẳng đó.

? Tìm độ dài x và y trong Hình 9.35.

Hình 9.35

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, BC = x (cm).

a) Tính x trong trường hợp tam giác ABC vuông tại B (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

b) Tìm x để tam giác ABC vuông tại A.

Giải

a) Nếu tam giác ABC vuông tại B thì theo định lí Pythagore ta có:

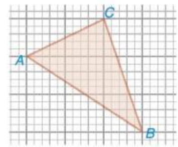
$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \text{ suy ra } 3^2 + x^2 = 4^2, \text{ hay } x = \sqrt{7}.$$

Vậy $x \approx 2,6$.

b) Theo định lí Pythagore đảo thì tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Vậy giá trị x cần tìm thoả mãn $x^2 = 4^2 + 3^2$, hay $x = 5$.

Luyện tập 1

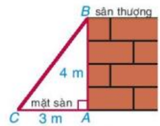
Trên giấy kẻ ô vuông (cạnh ô vuông bằng 1 cm), cho các điểm A, B, C như Hình 9.36. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.



Hình 9.36

Vận dụng 1

Trở lại *tình huống mở đầu*. Xem thành cầu thang như cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC (H.9.37). Từ đó, hãy tính độ dài cạnh BC để suy ra chiều dài cầu thang cần xây.



Hình 9.37

2 ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ PYTHAGORE

Tính độ dài đoạn thẳng

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Hãy tính độ dài cạnh BC, đường cao AH và các đoạn thẳng BH, CH.

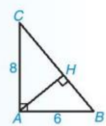
Giải. (H.9.38)

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông ABC, ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100, \text{ hay } BC = 10 \text{ (cm)}.$$

Vì diện tích của tam giác ABC bằng $\dfrac{AB \cdot AC}{2}$ và cũng bằng $\dfrac{AH \cdot BC}{2}$

nên $\dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{AH \cdot BC}{2}$, hay $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (cm).



Hình 9.38

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông AHB, ta được:

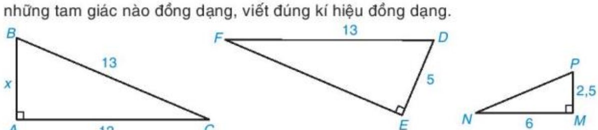
$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 6^2 - 4{,}8^2 = 12{,}96 \text{ hay } BH = 3{,}6 \text{ cm}.$$

Suy ra $CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$ (cm).

Nhận xét. Nếu tam giác vuông ABC tại A có đường cao $AH = h$, các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ thì $h \cdot a = b \cdot c$.

Luyện tập 2

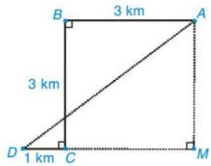
Cho các tam giác vuông với kích thước như Hình 9.39. Hãy tính độ dài x và cho biết những tam giác nào đồng dạng, viết đúng kí hiệu đồng dạng.



Hình 9.39

Vận dụng 2

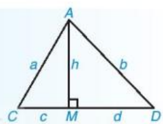
Để đón được một người khách, một xe taxi xuất phát từ vị trí điểm A, chạy dọc một con phố dài 3 km đến điểm B thì rẽ vuông góc sang trái, chạy được 3 km đến điểm C thì tài xế cho xe rẽ vuông góc sang phải, chạy 1 km nữa thì gặp người khách tại điểm D (H.9.40). Hỏi lúc đầu, khoảng cách từ chỗ người lái xe đến người khách là bao nhiêu kilômét?



Hình 9.40

Chứng minh tính chất hình học

Bài toán 2. Một chiếc cột có chiều cao h dựng thẳng đứng trên mặt đất tại điểm M, người ta kéo căng các sợi dây từ đỉnh cột (điểm A) lần lượt đến các điểm C và D trên mặt đất (H.9.41). Biết rằng $CM = c$, $DM = d$ và $c < d$. Hãy chứng minh rằng $a < b$.



Hình 9.41

Giải. (H.9.41)

Áp dụng định lí Pythagore cho hai tam giác vuông AMC và AMD, ta được:

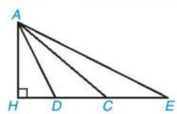
$$AC^2 = AM^2 + CM^2, \text{ hay } a^2 = h^2 + c^2 \quad (1)$$

$$\text{và } AD^2 = AM^2 + DM^2, \text{ hay } b^2 = h^2 + d^2 \quad (2).$$

Vì $c < d$ nên từ (1) và (2) suy ra $a^2 < b^2$. Do đó $a < b$.

Chú ý. Trong Bài toán 2, nếu gọi AM là đường cao, các đoạn thẳng AC, AD là đường xiên thì đoạn thẳng MC được gọi là hình chiếu của đường xiên AC và đoạn thẳng MD được gọi là hình chiếu của hình xiên AD.

? Cho Hình 9.42, trong các đoạn thẳng AC, AD, AE, đoạn nào có độ dài lớn nhất, đoạn nào có độ dài nhỏ nhất?

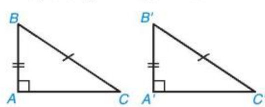


Hình 9.42

Luyện tập 3

Trước đây chúng ta thừa nhận định lí về trường hợp bằng nhau đặc biệt của hai tam giác vuông: “Nếu một cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau”. Áp dụng định lí Pythagore, em hãy chứng minh định lí trên.

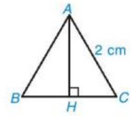
GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$.
KL	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.



Hình 9.43

Thử thách nhỏ

Hãy tính chiều cao theo đơn vị centimét của một tam giác đều cạnh 2 cm (H.9.44) (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 9.44

BÀI TẬP

9.17. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $AB^2 + BC^2 = AC^2$. b) $BC^2 - AC^2 = AB^2$.

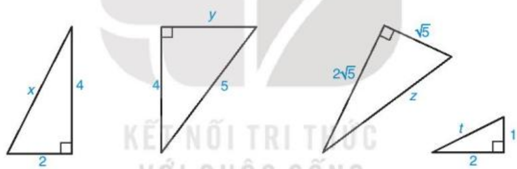
c) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. d) $BC^2 - AB^2 = AC^2$.

9.18. Những bộ ba số đo nào dưới đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông?

a) 1 cm, 1 cm, 2 cm. b) 2 cm, 4 cm, 20 cm.

c) 5 cm, 4 cm, 3 cm. d) 2 cm, 2 cm, $2\sqrt{2}$ cm.

9.19. Tính các độ dài x, y, z, t trong Hình 9.45.

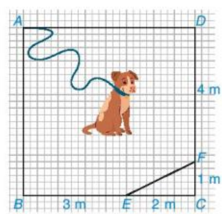


Hình 9.45

9.20. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, chiều cao $AH = 3$ cm và cạnh đáy $BC = 10$ cm. Hãy tính độ dài các cạnh bên AB, AC.

9.21. Hãy tính diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng 8 cm và đường chéo dài 17 cm.

9.22. Chú cún bị xích bởi một sợi dây dài 6 m để canh một mảnh vườn giới hạn bởi các điểm A, B, E, F, D trong hình vuông $ABCD$ có cạnh 5 m như Hình 9.46. Đầu xích buộc cố định tại điểm A của mảnh vườn. Hỏi chú cún có thể chạy đến tất cả các điểm của mảnh vườn mình phải canh không?



Hình 9.46

Bài 36 CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

Kiến thức, kĩ năng

- Giải thích các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc vận dụng các tam giác vuông đồng dạng.

Nam và Việt muốn đo chiều cao của cột cờ ở sân trường mà hai bạn không trèo lên được. Vào buổi chiều, Nam đo thấy bóng của cột cờ dài 6 m và bóng của Việt dài 70 cm. Nam hỏi Việt cao bao nhiêu, Việt trả lời là cao 1,4 m. Nam liền reo lên: "Tớ biết cột cờ cao bao nhiêu rồi đấy!". Vậy cột cờ cao bao nhiêu và làm sao bạn Nam biết được?

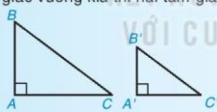
Qua bài này, các em sẽ có câu trả lời cho câu hỏi trên.

1 ÁP DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

Từ các trường hợp đồng dạng góc – góc và cạnh – góc – cạnh của hai tam giác trong bài trước, ta suy ra hai định lí sau:

Định lí 1. Nếu một góc nhọn của tam giác vuông này bằng một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Định lí 2. Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

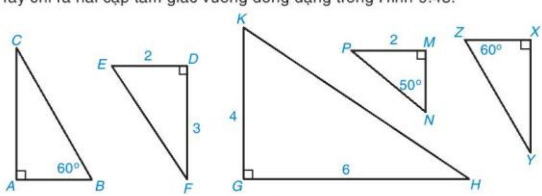


Hình 9.47

ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A'.

- Nếu $\widehat{B'} = \widehat{B}$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.
- Nếu $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ thì $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

? Hãy chỉ ra hai cặp tam giác vuông đồng dạng trong Hình 9.48.



Hình 9.48

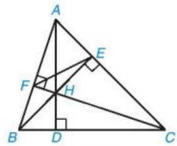
Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H.

Chứng minh rằng:

a) $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$;

b) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.49

Giải. (H.9.49)

GT	ΔABC, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H
KL	a) $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$; b) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.

a) Hai tam giác vuông AHF (vuông tại F) và CHD (vuông tại D) có:

$$\widehat{AHF} = \widehat{CHD} \text{ (hai góc đối đỉnh).}$$

Do đó $\Delta AHF \backsim \Delta CHD$. Suy ra $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{HF}{HD}$, hay $HA \cdot HD = HC \cdot HF$. (1)

Tương tự, vì $\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (hai góc đối đỉnh) nên hai tam giác vuông AHE (vuông tại E) và BHD (vuông tại D) đồng dạng với nhau.

Suy ra $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HE}{HD}$ hay $HA \cdot HD = HB \cdot HE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$.

b) Hai tam giác vuông ABE (vuông tại E) và ACF (vuông tại F) có góc $\widehat{A}$ chung nên $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$. Suy ra $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$, hay $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$.

Hai tam giác AEF và ABC có: $\widehat{A}$ chung, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (chứng minh trên).

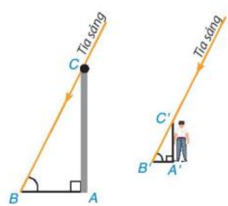
Vậy $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

Luyện tập 1

Trở lại *tình huống mở đầu*, ta thấy chiếc cột cùng với bóng của nó tạo thành hai cạnh góc vuông của tam giác ABC vuông tại đỉnh A, bạn Việt và bóng của mình cũng được xem là hai cạnh góc vuông của tam giác $A'B'C'$ vuông tại đỉnh A' (H.9.50). Vì các tia sáng Mặt Trời tạo với hai cái bóng các góc bằng nhau nên $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

a) Hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không?

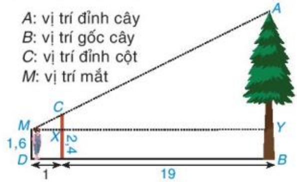
b) Bạn Nam đã tính chiều cao chiếc cột, tức là độ dài đoạn thẳng AB như thế nào và kết quả là bao nhiêu?



Hình 9.50

Thử thách nhỏ

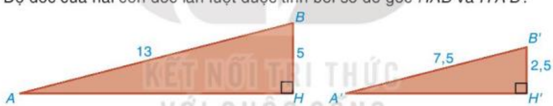
Một người đo chiều cao của một cái cây bằng cách chôn một chiếc cọc xuống đất, cọc cao 2,4 m và cách vị trí gốc cây 19 m. Người đó đứng cách xa chiếc cọc 1 m và nhìn thấy đỉnh cọc thẳng với đỉnh của cây. Hãy tính chiều cao của cây, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1,6 m (H.9.51).



Hình 9.51

2 TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

HĐ1 Các tam giác vuông AHB và $A'H'B'$ trong Hình 9.52 mô tả hai con dốc có chiều dài lần lượt là $AB = 13$ m, $A'B' = 7{,}5$ m và độ cao lần lượt là $BH = 5$ m, $B'H' = 2{,}5$ m. Độ dốc của hai con dốc lần lượt được tính bởi số đo góc HAB và $H'A'B'$.



Hình 9.52

– Nhận xét về hai đại lượng $\dfrac{A'B'}{AB}$ và $\dfrac{B'H'}{BH}$.

– Dùng định lí Pythagore để tính AH và $A'H'$.

– So sánh các đại lượng $\dfrac{A'H'}{AH}$ và $\dfrac{B'H'}{BH}$.

– Hai tam giác vuông $A'H'B'$ và AHB có đồng dạng không? Từ đó rút ra kết luận gì về độ dốc của hai con dốc.

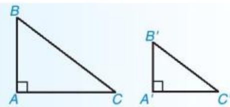
Tổng quát, ta có định lí sau:

Định lí (trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông)

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Chứng minh định lí (H.9.53)

GT	ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{A'} = 90^\circ$, $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB}$.
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.53

Áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông $A'B'C'$ và ABC, ta được:

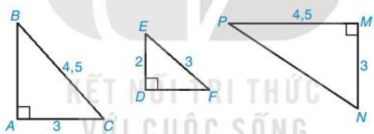
$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2;\ BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Suy ra $B'C'^2 - A'B'^2 = A'C'^2$ và $BC^2 - AB^2 = AC^2$. Vậy từ giả thiết $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'B'}{AB}$, ta có:

$$\frac{B'C'^2}{BC^2} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{B'C'^2 - A'B'^2}{BC^2 - AB^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}.$$

Do đó $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$. Suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (c.c.c).

? Hãy chỉ ra các cặp tam giác vuông đồng dạng với nhau trong Hình 9.54, viết đúng kí hiệu đồng dạng.



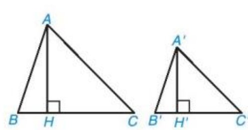
Hình 9.54

Ví dụ 2

Giả sử các chân đường cao H, H' lần lượt hạ từ đỉnh A và A' của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ nằm trên các cạnh BC, $B'C'$ thoả mãn $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'H'}{AH} = \dfrac{A'C'}{AC}$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Giải. (H.9.55)

GT	$\Delta A'B'C'$, ΔABC, H thuộc cạnh BC, H' thuộc cạnh $B'C'$, $AH \perp BC$, $A'H' \perp B'C'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'H'}{AH} = \dfrac{A'C'}{AC}$.
KL	$\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.55

Tam giác vuông ABH (vuông tại H) và tam giác vuông $A'B'H'$ (vuông tại H') có:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'H'}{AH}$. Vậy $\Delta A'B'H' \backsim \Delta ABH$. Suy ra $\widehat{A'B'H'} = \widehat{ABH}$. (1)

Tam giác vuông ACH (vuông tại H) và tam giác vuông $A'C'H'$ (vuông tại H') có:

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'H'}{AH}$. Vậy $\Delta A'C'H' \backsim \Delta ACH$. Suy ra $\widehat{A'C'H'} = \widehat{ACH}$. (2)

Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có:

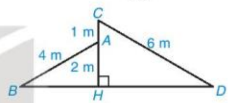
$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} \text{ (theo (1))}, \quad \widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB} \text{ (theo (2))}.$$

Vậy $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (g.g).

Nhận xét. Ngược lại, nếu $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số k và AH, $A'H'$ lần lượt là các đường cao của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\Delta A'B'H' \backsim \Delta ABH$ (do $\widehat{B} = \widehat{B'}$) theo tỉ số k và $\frac{A'H'}{AH} = k$.

Luyện tập 2

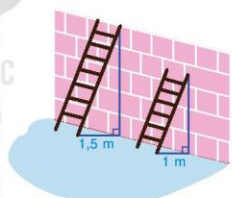
Một ngôi nhà với hai mái lệch AB, CD được thiết kế như Hình 9.56 sao cho $CD = 6$ m, $AB = 4$ m, $HA = 2$ m, $AC = 1$ m. Chứng tỏ rằng $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$.



Hình 9.56

Vận dụng

Thường ngày đến công trường, bác Hoan dùng một chiếc thang lớn dựng lên một bức tường cao 6 m. Khi đặt chân thang cách chân tường 1,5 m thì vừa dựng thang lên đúng mặt trên bức tường. Hôm nay, bác Hoan chỉ có một chiếc thang nhỏ dài bằng $\frac{2}{3}$ chiếc thang lớn. Để đảm bảo an toàn, bác đặt chân thang cách chân tường 1 m (H.9.57). Hỏi khi dựng chiếc thang nhỏ lên thì điểm cao nhất của thang cách mặt trên bức tường bao nhiêu mét?



Hình 9.57

BÀI TẬP

9.23. Điều kiện nào dưới đây chứng tỏ rằng hai tam giác vuông đồng dạng?

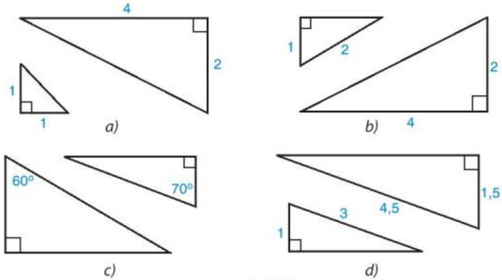
a) Một góc nhọn của tam giác này bằng một góc nhọn của tam giác kia.

b) Cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác này tỉ lệ với cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác kia.

c) Một cạnh góc vuông của tam giác này bằng một cạnh góc vuông của tam giác kia.

d) Hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia.

9.24. Cặp tam giác vuông nào đồng dạng với nhau trong Hình 9.58?



Hình 9.58

9.25. Cho góc nhọn xOy, các điểm A, N nằm trên tia Ox, các điểm B, M nằm trên tia Oy sao cho AM, BN lần lượt vuông góc với Oy, Ox. Chứng minh rằng tam giác OAM đồng dạng với tam giác OBN.

9.26. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thoả mãn $AC = 3AB$, $B'D' = 3A'B'$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

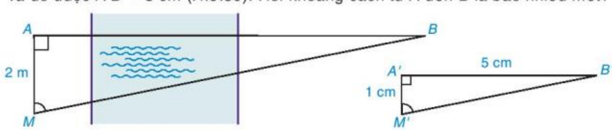
b) Nếu $A'B' = 2AB$ và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 2 m^2 thì diện tích hình chữ nhật $A'B'C'D'$ là bao nhiêu?

9.27. Cho tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k. Gọi $A'H'$ và AH lần lượt là các đường cao đỉnh A' và A của tam giác $A'B'C'$ và tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{A'H'}{AH} = k$;

b) Diện tích tam giác $A'B'C'$ bằng k^2 lần diện tích tam giác ABC.

9.28. Một người ở vị trí điểm A muốn đo khoảng cách đến điểm B ở bên kia sông mà không thể qua sông được. Sử dụng giác kế, người đó xác định được một điểm M trên bờ sông sao cho AM = 2 m, AM vuông góc với AB và đo được số đo góc AMB. Tiếp theo, người đó vẽ trên giấy tam giác $A'M'B'$ vuông tại A', có $A'M'$ = 1 cm, $\widehat{A'M'B'} = \widehat{AMB}$ và đo được $A'B'$ = 5 cm (H.9.59). Hỏi khoảng cách từ A đến B là bao nhiêu mét?



Hình 9.59

Bài 37 HÌNH ĐỒNG DẠNG

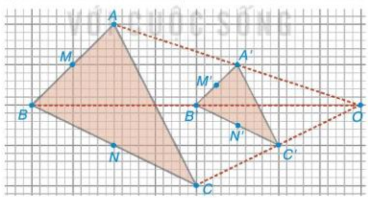
Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
• Hình đồng dạng • Hình đồng dạng phối cảnh	• Nhận biết hai hình đồng dạng. • Nhận biết hai hình đồng dạng phối cảnh. • Nhận biết được vẻ đẹp trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo,... biểu hiện qua hình đồng dạng.

Ta thấy rằng hai hình phẳng bằng nhau, tức là hai hình có thể chồng khít lên nhau, thì sẽ có hình dạng và kích thước giống nhau. Ngoài ra, còn có những hình có kích thước khác nhau nhưng vẫn có hình dạng giống nhau (ví dụ hình chụp những chú cá trong Hình 9.60). Trong các hình đơn giản đã được học, có những hình nào có tính chất đó? Bài này chúng ta sẽ tìm hiểu về những hình như vậy.

Hình 9.60

Hình đồng dạng. Hình đồng dạng phối cảnh

HĐ1 Lấy điểm O và vẽ tam giác $A'B'C'$ như Hình 9.61. Trên các tia OA', OB', OC', lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = 2OA'$, $OB = 2OB'$, $OC = 2OC'$.



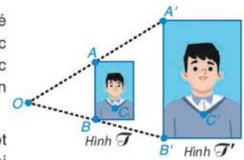
Hình 9.61

– Hãy giải thích vì sao $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng bằng 2.

– Dùng thước thẳng, em hãy kiểm tra xem đường thẳng MM', NN' nối các trung điểm có đi qua O không?

Trong Hình 9.61, ta nói tam giác ABC là hình phóng to (2 lần) của tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ là hình thu nhỏ (2 lần) của tam giác ABC.

HĐ2 Hình 9.62 là hai bức hình chân dung của một cậu bé với kích thước 2 x 3 (hình $\mathscr{T}$) và 4 x 6 (hình $\mathscr{T}'$) được đặt cạnh nhau theo chiều thẳng đứng. Ta thấy các đường thẳng AA', BB' nối các điểm tương ứng trên hai bức chân dung cùng đi qua một điểm O.



Hình 9.62

Dùng thước thẳng, em hãy kiểm tra xem một đường thẳng nối hai điểm tương ứng tuỳ ý trên hai hình (ví dụ C và C') có đi qua điểm O không?

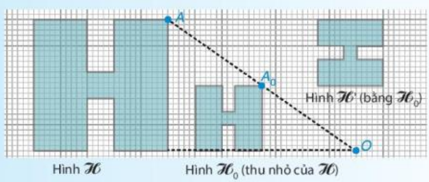
Ta cũng nói hình $\mathscr{T}'$ là hình phóng to của hình $\mathscr{T}$ với tỉ số 6 : 3 = 2, hình $\mathscr{T}$ là hình thu nhỏ của hình $\mathscr{T}'$ với tỉ số 3 : 6 = $\frac{1}{2}$.

– Các cặp hình phóng to – thu nhỏ tương tự như trên được gọi là các hình đồng dạng phối cảnh. Điểm đồng quy O trong mỗi hình được gọi là tâm phối cảnh của các cặp hình. Trong Hình 9.62, ta nói hình $\mathscr{T}'$ đồng dạng phối cảnh với hình $\mathscr{T}$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{OA'}{OA} = 2$.

– Trong cặp hình phóng to – thu nhỏ, nếu thay đổi vị trí của một hình đi thì chúng vẫn có hình dạng giống nhau (H.9.63). Khi đó chúng được gọi là hình đồng dạng. Cụ thể, *một hình $\mathscr{H}'$ được gọi là đồng dạng với hình $\mathscr{H}$ nếu nó bằng $\mathscr{H}$ hoặc bằng với một hình phóng to hay thu nhỏ của $\mathscr{H}$* (H.9.64).

Hai con bướm *Hai bông hoa*

Hình 9.63

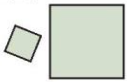


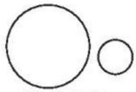
Hình 9.64

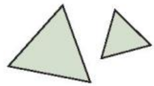
Theo em, hai hình tam giác bằng nhau có phải là hai hình đồng dạng phối cảnh không?

Ví dụ

- Trong các hình học đơn giản chúng ta đã học, những cặp hình dưới đây là cặp hình đồng dạng.

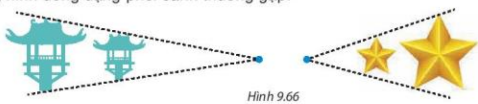

Cặp hình vuông


Cặp hình tròn


Cặp hình tam giác đều

Hình 9.65

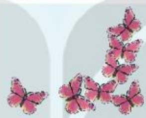
- Những hình đồng dạng phối cảnh thường gặp:

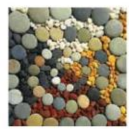


Hình 9.66

- Những hình đồng dạng trong thế giới tự nhiên:


Hình lá cây


Hình đàn bướm


Hình những viên đá cuội

Hình 9.67

- Những hình đồng dạng sử dụng trong các công trình kiến trúc và trang trí:


Cung điện Hawa Mahal (Ấn Độ)


Các tam giác đều


Hình các kim tự tháp

Hình 9.68

- Những hình đồng dạng phối cảnh trong nghệ thuật và thiết kế:

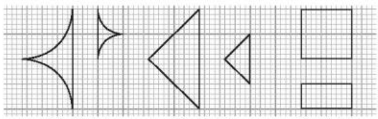

Hình búp bê Nga


Tác phẩm sắp đặt "The Wave" ở Copenhagen (Đan Mạch)


Hình các tầng tháp

Hình 9.69

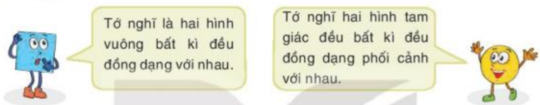
Luyện tập Trong những cặp hình dưới đây (H.9.70), cặp hình nào là hai hình đồng dạng? Hãy chỉ ra một cặp hình đồng dạng phối cảnh và vẽ cặp hình đó cùng tâm phối cảnh vào vở.



Cặp hình 1 Cặp hình 2 Cặp hình 3

Hình 9.70

Tranh luận

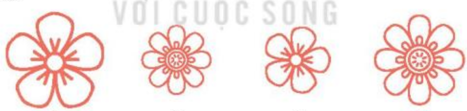


Theo em, bạn nào đúng, bạn nào sai? Cho biết ý kiến của em.

BÀI TẬP

9.29. Lấy một điểm O nằm ngoài một đoạn thẳng AB. Hãy vẽ hình đồng dạng phối cảnh tâm O của đoạn thẳng AB theo tỉ số đồng dạng $\frac{1}{2}$.

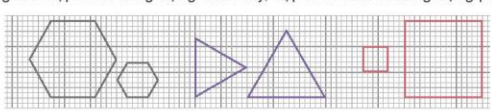
9.30. Biết rằng mỗi hình dưới đây đồng dạng với một hình khác, hãy tìm các cặp hình đồng dạng đó.



a) b) c) d)

Hình 9.71

9.31. Trong các cặp hình đồng dạng dưới đây, cặp hình nào là đồng dạng phối cảnh?



Cặp hình lục giác đều Cặp hình tam giác đều Cặp hình vuông

Hình 9.72

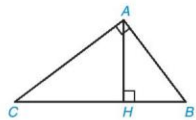
LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, biết $AB = 5$ cm, $AH = 4$ cm.

a) Chứng minh $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AC.



Hình 9.73

Giải. (H.9.73)

GT	ΔABC, $\widehat{A} = 90^o$, AH vuông góc với BC tại H, $AB = 5$ cm, $AH = 4$ cm.
KL	a) $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$; b) Tính BH, CH, AC.

a) Xét tam giác AHB vuông tại H và tam giác CHA vuông tại H, ta có:

$$\widehat{ABH} = 90^o - \widehat{HAB} = \widehat{CAB} - \widehat{HAB} = \widehat{CAH}.$$

Vậy $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ (cặp góc nhọn bằng nhau).

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông AHB, ta có:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2.$$

Suy ra $BH = 3$ cm.

Mặt khác, vì $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ nên $\frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA}$. Suy ra $CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{16}{3}$ (cm).

Đồng thời $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH}$. Do đó $AC = \frac{AB \cdot CH}{AH} = \frac{20}{3}$ (cm).

Ví dụ 2

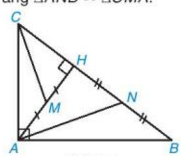
Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Cho AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = BH \cdot BC$; $AC^2 = CH \cdot BC$;

b) $AH^2 = BH \cdot CH$;

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH. Chứng minh rằng $\Delta ANB \backsim \Delta CMA$.

Giải. (H.9.74)



Hình 9.74

Từ giả thiết, ta thấy $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 25$.

Theo định lí Pythagore đảo thì ABC là tam giác vuông tại A.

a) Tam giác AHB vuông tại H và tam giác CAB vuông tại A có: góc $\widehat{B}$ chung nên $\Delta AHB \backsim \Delta CAB$ (một góc nhọn bằng nhau).

Do đó $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$, hay $AB^2 = BH \cdot BC$. Tương tự $AC^2 = CH \cdot BC$.

b) Tam giác AHB vuông tại H và tam giác CHA vuông tại H có:

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ACH} = \widehat{CAH}.$$

Vậy $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ (một góc nhọn bằng nhau). Do đó $\frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA}$, hay $AH^2 = BH \cdot CH$.

c) Vì $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ nên $\frac{HB}{AB} = \frac{HA}{CA}$ và $\widehat{HBA} = \widehat{HAC}$.

Hai tam giác ANB và CMA có: $\frac{NB}{AB} = \frac{HB}{2AB} = \frac{HA}{2CA} = \frac{AM}{CA}$,

$$\widehat{NBA} = \widehat{HBA} = \widehat{HAC} = \widehat{MAC}.$$

Vậy $\Delta ANB \backsim \Delta CMA$ (c.g.c).

Nhận xét. Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BH = b'$, $CH = c'$, $AH = h$. Theo chứng minh câu a và câu b của Ví dụ 2 ta suy ra $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$; $h^2 = b'c'$.

BÀI TẬP

9.32. Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH. Biết rằng $BH = 16$ cm, $CH = 9$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AH.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AB và AC.

9.33. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Cho điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 4$ cm. Vẽ đường thẳng MN vuông góc với AC tại N và đường thẳng MP vuông góc với AB tại P.

a) Chứng minh rằng $\Delta BMP \backsim \Delta MCN$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AM.

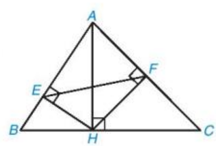
9.34. Trong Hình 9.75, cho AH, HE, HF lần lượt là các đường cao của các tam giác ABC, AHB, AHC.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta AEH \backsim \Delta AHB$;

b) $\Delta AFH \backsim \Delta AHC$;

c) $\Delta AFE \backsim \Delta ABC$.



Hình 9.75

9.35. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh $\Delta HBM \backsim \Delta HAN$.

9.36. Vào gần buổi trưa, khi bóng bạn An dài 60 cm thì bóng cột cờ dài 3 m.

a) Biết rằng bạn An cao 1,4 m. Hỏi cột cờ cao bao nhiêu mét?

b) Vào buổi chiều khi bóng bạn An dài 3 m, hỏi bóng cột cờ dài bao nhiêu mét?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

9.37. Cho ABC là tam giác không cân. Biết $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\Delta A'C'B' \backsim \Delta ACB$. B. $\Delta B'C'A' \backsim \Delta BAC$.

C. $\Delta B'A'C' \backsim \Delta BCA$. D. $\Delta A'C'B' \backsim \Delta ABC$.

9.38. Cho $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng bằng 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$. B. $\dfrac{AB}{A'C'} = 2$. C. $\dfrac{A'B'}{AB} = 2$. D. $\dfrac{A'B'}{AC} = 2$.

9.39. Trong các bộ ba số đo dưới đây, đâu là số đo ba cạnh của một tam giác vuông?

A. 3 m; 5 m; 6 m. B. 6 m; 8 m; 10 m.

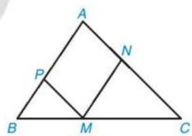
C. 1 cm; 0,5 cm; 1,25 cm. D. 9 m; 16 m; 25 m.

9.40. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB \neq AC$) và tam giác DEF vuông tại D ($DE \neq DF$). Điều nào dưới đây **không** suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$?

A. $\hat{B} = \hat{E}$. B. $\hat{C} = \hat{F}$. C. $\hat{B} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{F}$. D. $\hat{B} - \hat{C} = \hat{E} - \hat{F}$.

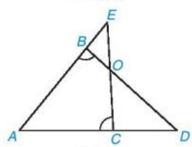
B. TỰ LUẬN

9.41. Cho Hình 9.76, biết rằng $MN // AB$, $MP // AC$. Hãy liệt kê ba cặp hai tam giác (khác nhau) đồng dạng có trong hình.



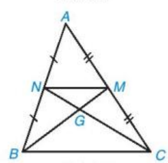
Hình 9.76

9.42. Cho Hình 9.77, biết rằng $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Chứng minh rằng $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ và $\Delta BOE \backsim \Delta COD$.



Hình 9.77

9.43. Hai đường trung tuyến BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại điểm G (H.9.78). Chứng minh rằng tam giác GMN đồng dạng với tam giác GBC và tìm tỉ số đồng dạng.



Hình 9.78

9.44. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi AH, HD lần lượt là các đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC và đỉnh H của tam giác HAB.

a) Chứng minh rằng $\Delta HDA \backsim \Delta AHC$.

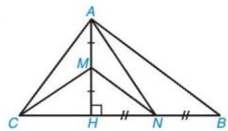
b) Tính độ dài các đoạn thẳng HA, HB, HC, HD.

9.45. Cho tam giác ABC có đường cao AH. Biết $AH = 12$ cm, $CH = 9$ cm, $BH = 16$ cm. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH (H.9.79).

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông tại A.

b) Chứng minh rằng $MN \perp AC$ và $CM \perp AN$.

c) Tính diện tích tam giác AMN.



Hình 9.79

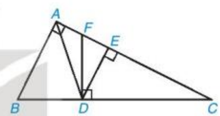
9.46. Cho tam giác ABC vuông tại A và các điểm D, E, F như Hình 9.80 sao cho AD là phân giác của góc BAC, DE và DF lần lượt vuông góc với AC và BC.

Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AB + AC}$, từ đó suy ra $AE = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + AC}$;

b) $\Delta DFC \backsim \Delta ABC$;

c) $DF = DB$.



Hình 9.80

9.47. Để tính được chiều cao gần đúng của kim tự tháp Ai Cập, người ta cắm 1 cây cọc cao 1 m vuông góc với mặt đất và đo được bóng cây cọc trên mặt đất là 1,5 m. Khi đó chiều dài bóng của kim tự tháp trên mặt đất là 208,2 m. Hỏi kim tự tháp cao bao nhiêu mét?

9.48. Một xe taxi xuất phát từ điểm A để đón khách tại điểm B. Biết rằng đầu tiên người lái xe đi thẳng 3 km, sau đó rẽ vuông góc sang bên phải và đi được một đoạn 3 km nữa thì rẽ vuông góc sang trái. Người lái xe đi thẳng tiếp 1 km nữa thì đến được điểm B. Hỏi khoảng cách giữa A và B bằng bao nhiêu?

9.49. Từ căn hộ chung cư nhà mình, bạn Lan đứng cách cửa sổ 1 m nhìn sang toà nhà đối diện thì vừa nhìn thấy đúng tất cả 6 tầng của toà nhà đó. Biết rằng cửa sổ nhà Lan cao 80 cm và mỗi tầng của toà nhà đối diện cao 4 m. Hỏi khoảng cách từ căn hộ nhà Lan đến toà nhà đối diện là bao nhiêu?

Chương X
MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Những kim tự tháp tại Ai Cập, công trình kiến trúc tại bảo tàng Louvre (Pháp) hay những chiếc rubik,... có dạng hình chóp tứ giác đều, hình chóp tam giác đều,... Đây là những hình khối đẹp, có nhiều ứng dụng trong thực tế đời sống. Chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một số vấn đề cơ bản về chúng và những bài toán liên quan.

Bài 38 HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Hình chóp tam giác đều	• Mô tả đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy của hình chóp tam giác đều. • Tạo lập hình chóp tam giác đều. • Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tam giác đều. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích, diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.

Đỉnh FANSIPAN (Lào Cai) cao 3 143 m, là đỉnh núi cao nhất Đông Dương. Trên đỉnh núi, người ta đặt một chóp làm bằng inox có dạng hình chóp tam giác đều cạnh đáy dài 60 cm, chiều cao 90 cm (H.10.1). Hỏi tổng diện tích các mặt bên của hình chóp bằng bao nhiêu?

Hình 10.1

1 HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

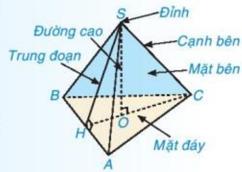
Hình chóp tam giác đều

• Hình chóp tam giác đều có đáy là một tam giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau chung một đỉnh. Đỉnh chung này được gọi là *đỉnh* của hình chóp tam giác đều.

Trong Hình 10.2, $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

• Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp và trọng tâm của tam giác đáy gọi là *đường cao* của hình chóp tam giác đều.

• Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp tam giác đều.



Hình 10.2

Hãy gọi tên đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao, trung đoạn của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ trong Hình 10.2.

Nhận xét. Hình chóp tam giác đều có:

– Đáy là tam giác đều;

– Mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh;

– Chân đường cao kẻ từ đỉnh tới mặt đáy là điểm cách đều các đỉnh của tam giác đáy.

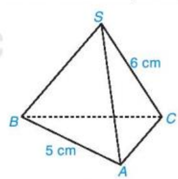
Thực hành

Sử dụng bìa cứng, cắt và gấp hình chóp tam giác đều với kích thước như Hình 10.3 theo hướng dẫn sau:

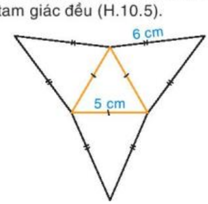
Bước 1. Vẽ hình khai triển của hình chóp tam giác đều theo kích thước đã cho như Hình 10.4.

Bước 2. Cắt theo viền.

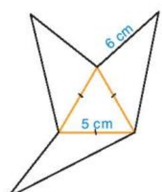
Bước 3. Gấp theo các đường màu cam để được hình chóp tam giác đều (H.10.5).



Hình 10.3



Hình 10.4

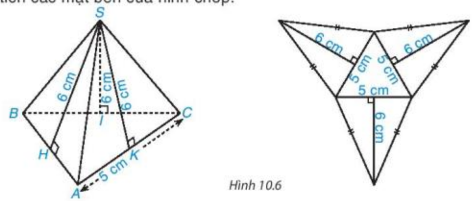


Hình 10.5

2 DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều

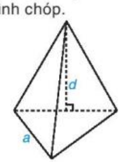
HĐ1 Quan sát hình chóp tam giác đều và hình khai triển của nó (H.10.6). Hãy tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp.



Hình 10.6

HĐ2 Hãy tính tích của nửa chu vi mặt đáy với trung đoạn của hình chóp tam giác đều. So sánh kết quả vừa tính với tổng diện tích các mặt bên của hình chóp.

> Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn.
>
> $$S_{xq} = p \cdot d,$$
>
> trong đó p: nửa chu vi đáy,
>
> d: trung đoạn.



Ví dụ 1

Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ trong Hình 10.7.

Giải

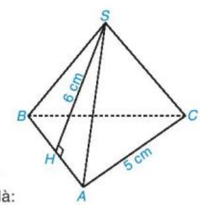
Nửa chu vi đáy của hình chóp tam giác đều là:

$$p = \frac{1}{2}(5+5+5) = \frac{15}{2} \text{ (cm)}.$$

Trung đoạn của hình chóp tam giác đều là $d = SH = 6$ cm.

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là:

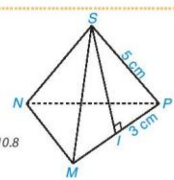
$$S_{xq} = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 10.7

Luyện tập

Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ trong Hình 10.8, biết $IP = 3$ cm và cạnh bên $SP = 5$ cm.

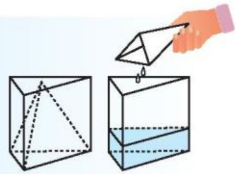


Hình 10.8

Thể tích của hình chóp tam giác đều

Hai dụng cụ đựng nước có dạng hình lăng trụ đứng đáy là tam giác đều và hình chóp tam giác đều có thể đặt "chồng khít" lên nhau. Chiều cao của hình chóp tam giác đều bằng chiều cao của hình lăng trụ.

Nếu ta lấy dụng cụ hình chóp tam giác đều múc đầy nước và đổ hết vào dụng cụ hình lăng trụ đứng thì thấy chiều cao của cột nước chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ (H.10.9).



Hình 10.9

Như vậy: $V_{chóp} = \frac{1}{3}V_{lăng\,trụ} = \frac{1}{3}S \cdot h$.

Thể tích hình chóp tam giác đều bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích mặt đáy với chiều cao của nó.

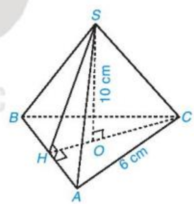
$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

trong đó S: diện tích đáy,

h: chiều cao của hình chóp.

Ví dụ 2

Tính thể tích hình chóp tam giác đều $S.ABC$ trong Hình 10.10, biết cạnh đáy bằng 6 cm, chiều cao của hình chóp $SO = 10$ cm. Cho biết $\sqrt{27} \approx 5,2$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 10.10

Giải

Trong tam giác đều ABC có $CH \perp AB$ nên CH là trung tuyến của ΔABC.

Suy ra $BH = HA = \frac{1}{2}AB = 3$ (cm).

Tam giác AHC vuông tại H nên $HA^2 + HC^2 = AC^2$ (định lí Pythagore).

Suy ra $3^2 + HC^2 = 6^2$

$HC^2 = 36 - 9$

$HC^2 = 27$

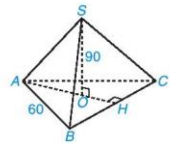
$HC = \sqrt{27} \approx 5,2$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}AB \cdot CH \approx \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,2 = 15,6$ (cm^2).

Thể tích của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3}S \cdot h \approx \frac{1}{3} \cdot 15,6 \cdot 10 = 52$ (cm^3).

Vận dụng

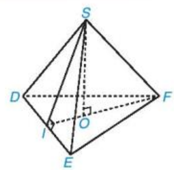
Hình 10.11 mô tả hình chóp trong *tình huống mở đầu*. Dựa vào đó, em hãy trả lời câu hỏi của bài toán.



Hình 10.11

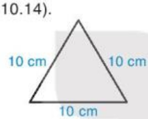
BÀI TẬP

10.1. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều trong Hình 10.12.

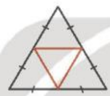


Hình 10.12

10.2. Vẽ và cắt một tam giác đều có cạnh 10 cm (H.10.13) rồi gấp theo đường màu cam để được hình chóp tam giác đều (H.10.14).



Hình 10.13



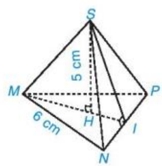
Hình 10.14

Trong các bài tập 10.3, 10.4, hãy làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

10.3. Cho hình chóp tam giác đều $S.MNP$ như Hình 10.15.

a) Tính diện tích tam giác MNP.

b) Tính thể tích hình chóp $S.MNP$, biết $\sqrt{27} \approx 5,19$.



Hình 10.15

10.4. Nhà bạn Thu có một đèn trang trí có dạng hình chóp tam giác đều như Hình 10.16. Các cạnh của hình chóp đều bằng nhau và bằng 20 cm. Bạn Thu dự định sẽ dán các mặt bên của đèn bằng những tấm giấy màu. Tính diện tích giấy bạn Thu sử dụng (coi như mép dán không đáng kể). Cho biết $\sqrt{300} \approx 17,32$.

Hình 10.16

Bài 39 HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

Khái niệm, thuật ngữ	Kiến thức, kĩ năng
Hình chóp tứ giác đều	• Mô tả đỉnh, mặt đáy, mặt bên, cạnh bên của hình chóp tứ giác đều. • Tạo lập hình chóp tứ giác đều. • Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều. • Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích, diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.

Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2 500 năm trước Công nguyên là một trong những công trình cổ nhất và duy nhất còn tồn tại trong số bảy kì quan thế giới cổ đại. Kim tự tháp này có dạng hình chóp tứ giác đều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m (H.10.17). Kim tự tháp Kheops có thể tích bằng bao nhiêu?

Hình 10.17

1 HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

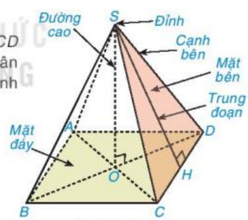
Hình chóp tứ giác đều

Hình chóp $S.ABCD$ trong Hình 10.18 có đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau, có chung đỉnh. Ta gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

HĐ1 Gọi tên đỉnh, các cạnh bên của hình chóp.

HĐ2 Gọi tên đường cao, trung đoạn của hình chóp.

HĐ3 Gọi tên các mặt bên và mặt đáy của hình chóp.



Hình 10.18

Nhận xét. Hình chóp tứ giác đều có:

– Mặt đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

– Chân đường cao kẻ từ đỉnh tới mặt đáy là điểm cách đều các đỉnh của mặt đáy (giao điểm hai đường chéo).

Ví dụ 1

Hãy cho biết đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ trong Hình 10.19.

Giải

Đỉnh: S.

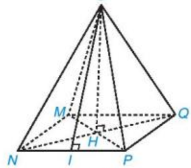
Các cạnh bên: SM, SN, SP, SQ.

Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau SMN, SNP, SPQ, SQM.

Mặt đáy là hình vuông $MNPQ$.

Đường cao: SH.

Trung đoạn: SI.



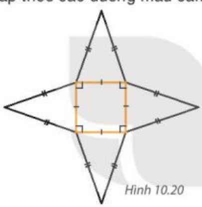
Hình 10.19

Thực hành

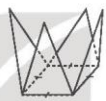
Cắt và gấp một miếng bìa thành hình chóp tứ giác đều theo hướng dẫn sau:

Bước 1. Vẽ hình khai triển theo mẫu và cắt theo viền (H.10.20).

Bước 2. Gấp theo các đường màu cam, ta được hình chóp tứ giác đều (H.10.21).



Hình 10.20



Hình 10.21

2 DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều

Tương tự hình chóp tam giác đều, diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều được tính như sau:

- Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn.

$$S_{xq} = p \cdot d,$$

trong đó p: nửa chu vi đáy,

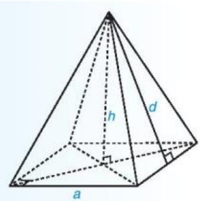
d: trung đoạn.

- Thể tích của hình chóp tứ giác đều bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích mặt đáy với chiều cao của nó.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

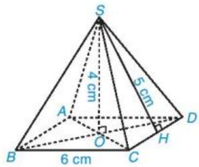
trong đó S: diện tích đáy,

h: chiều cao của hình chóp.



Ví dụ 2

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, biết độ dài cạnh đáy bằng 6 cm, chiều cao bằng 4 cm và trung đoạn bằng 5 cm.



Hình 10.22

Giải. (H.10.22)

Nửa chu vi của đáy $ABCD$ là: $(4 \cdot 6) : 2 = 12$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ là:

$$S_{xq} = p \cdot d = 12 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S = 6^2 = 36$ (cm^2).

Thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Luyện tập 1

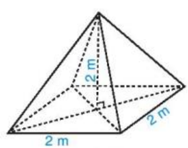
Bác Khôi làm một chiếc hộp gỗ có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy của hình chóp là 2 m, trung đoạn của hình chóp là 3 m. Bác Khôi muốn sơn bốn mặt xung quanh của hộp gỗ. Cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 30 000 đồng (tiền sơn và tiền công). Hỏi bác Khôi phải trả chi phí là bao nhiêu?

Luyện tập 2

Một chiếc lều có dạng hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy bằng 2 m, chiều cao bằng 2 m (H.10.23).

a) Thể tích không khí trong lều là bao nhiêu?

b) Biết lều phủ vải bốn phía và cả mặt tiếp đất. Tính diện tích vải bạt cần dùng (coi mép nối không đáng kể). Biết $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (làm tròn kết quả tới hàng phần mười).



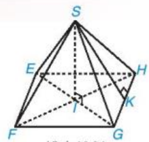
Hình 10.23

Vận dụng

Em hãy giải *bài toán mở đầu*.

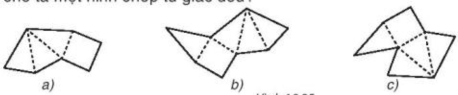
BÀI TẬP

10.5. Hãy cho biết đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tứ giác đều *S.EFGH* trong Hình 10.24.



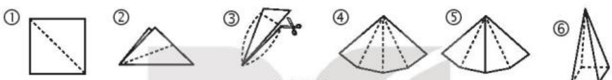
Hình 10.24

10.6. Trong các miếng bìa ở Hình 10.25, hình nào gấp lại cho ta một hình chóp tứ giác đều?



Hình 10.25

10.7. Từ tờ giấy cắt ra một hình vuông rồi thực hiện các thao tác như Hình 10.26 để có thể ghép được các mặt bên của hình chóp tứ giác đều.

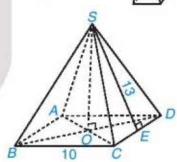


Hình 10.26

10.8. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* như Hình 10.27.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

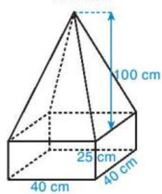


Hình 10.27

10.9. Bánh ít trong Hình 10.28 có dạng hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy 3 cm, cao 3 cm. Tính thể tích một chiếc bánh ít.

Hình 10.28

10.10. Một khối bê tông có dạng như Hình 10.29. Phần dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh 40 cm, chiều cao 25 cm. Phần trên của khối bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 100 cm. Tính thể tích của khối bê tông đó.

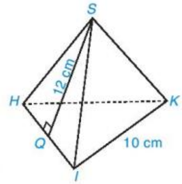


Hình 10.29

LUYỆN TẬP CHUNG

Ví dụ 1

Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều *S.HIK* trong Hình 10.30.



Hình 10.30

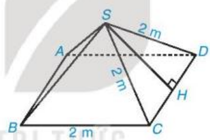
Giải

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều *S.HIK* là:

$$S_{xq} = p \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (10 + 10 + 10) \cdot 12 = 180 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2

Một mái che giếng trời của một ngôi nhà có dạng hình chóp tứ giác đều, bốn mặt bên làm bằng kính. Diện tích kính làm bốn mặt bên của mái che bằng bao nhiêu? Biết các mặt bên là các tam giác đều có cạnh dài 2 m và viền không đáng kể (H.10.31). Cho biết $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



Hình 10.31

Giải

Ta có $HD = \frac{1}{2}CD = 1$ (m).

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông *SHD*, ta có:

$SH^2 + HD^2 = SD^2$, suy ra $SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, hay $SH = \sqrt{3}$.

Vậy $SH \approx 1{,}73$ m.

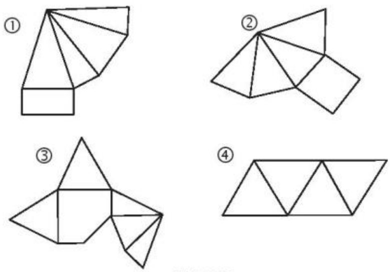
Diện tích kính làm bốn mặt mái che là:

$$S_{xq} = p \cdot d \approx \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2) \cdot 1{,}73 = 6{,}92 \text{ (m}^2\text{)}.$$

BÀI TẬP

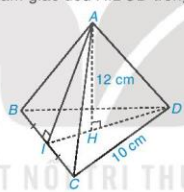
10.11. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều *S.ABC*, biết diện tích đáy của nó bằng 15,6 cm^2, chiều cao bằng 10 cm.

10.12. Trong các miếng bìa ở Hình 10.32, miếng bìa nào khi gấp và dán lại thì được một hình chóp tam giác đều, miếng nào được hình chóp tứ giác đều?



Hình 10.32

10.13. Tính thể tích hình chóp tam giác đều $A.BCD$ trong Hình 10.33, biết $\sqrt{75} \approx 8,66$.



Hình 10.33

10.14. Người ta làm mô hình một kim tự tháp ở cổng vào của bảo tàng Louvre. Mô hình có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 21 m, độ dài cạnh đáy là 34 m.

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Tính tổng diện tích các tấm kính để phủ kín bốn mặt bên hình chóp này.

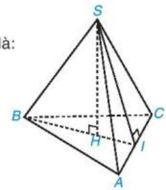
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

A. TRẮC NGHIỆM

10.15. Trung đoạn của hình chóp tam giác đều trong Hình 10.34 là:

A. *SB*. B. *SH*.

C. *SI*. D. *HI*.



Hình 10.34

10.16. Đáy của hình chóp tứ giác đều là:

A. Hình vuông. B. Hình bình hành.

C. Hình thoi. D. Hình chữ nhật.

10.17. Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng:

A. Tích của nửa chu vi đáy và chiều cao của hình chóp.

B. Tích của nửa chu vi đáy và trung đoạn.

C. Tích của chu vi đáy và trung đoạn.

D. Tổng của chu vi đáy và trung đoạn.

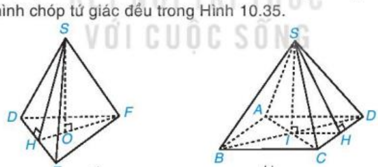
10.18. Một hình chóp tam giác đều có chiều cao h, thể tích V. Diện tích đáy S là:

A. $S = \frac{h}{V}$. B. $S = \frac{V}{h}$.

C. $S = \frac{3V}{h}$. D. $S = \frac{3h}{V}$.

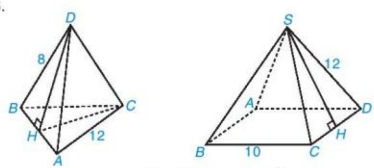
B. TỰ LUẬN

10.19. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, cạnh đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong Hình 10.35.



Hình 10.35

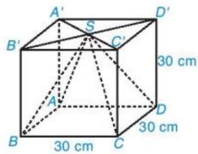
10.20. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong Hình 10.36.



Hình 10.36

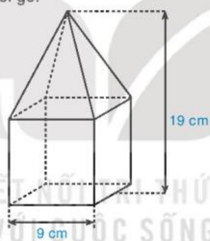
10.21. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều, biết chiều cao bằng 9 cm và chu vi đáy bằng 12 cm.

10.22. Từ một khúc gỗ hình lập phương cạnh 30 cm (H.10.37), người ta cắt đi một phần gỗ để được phần còn lại là một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh 30 cm và chiều cao của hình chóp cũng bằng 30 cm. Tính thể tích của phần gỗ bị cắt đi.



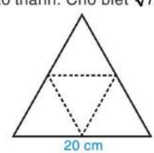
Hình 10.37

10.23. Một khối gỗ gồm đế là hình lập phương cạnh 9 cm và một hình chóp tứ giác đều (H.10.38). Tính thể tích khối gỗ.



Hình 10.38

10.24. Bạn Trang cắt miếng bìa hình tam giác đều cạnh dài 20 cm (H.10.39) và gấp lại theo các dòng kẻ (nét đứt) để được hình chóp tam giác đều. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều tạo thành. Cho biết $\sqrt{75} \approx 8,66$.



Hình 10.39

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG TÀI CHÍNH

Mục tiêu

Giới thiệu một vài ứng dụng đơn giản của hàm số bậc nhất trong tài chính.

Hàm số bậc nhất được sử dụng trong nhiều vấn đề của cuộc sống. Trong những tình huống đơn giản, hàm chi phí trong sản xuất hoặc tiêu dùng một loại hàng hoá, hàm cung và hàm cầu của một mặt hàng là những hàm số bậc nhất. Trong bài này, chúng ta sẽ tìm hiểu một vài mô hình đơn giản trong tài chính liên quan đến hàm số bậc nhất.

Chuẩn bị:

– Thu thập số liệu về giá cước của một số gói dịch vụ truyền hình, gói internet phổ biến.

– Thu thập số liệu về giá tiền và công suất tiêu thụ điện của một số loại ti vi, tủ lạnh phổ biến dành cho gia đình.

– Máy tính cầm tay.

Các bước thực hiện:

Chia lớp thành bốn nhóm và thực hiện lần lượt các bước sau:

Bước 1. Các nhóm thực hiện HĐ1 và HĐ2 dưới đây để tìm hiểu về cách xây dựng công thức của hàm chi phí và phương pháp khấu hao đường thẳng.

HĐ1 **Xây dựng công thức của hàm chi phí**

Chi phí sử dụng truyền hình cáp của hai công ty dịch vụ truyền hình A và B như sau:

	Công ty A	Công ty B
Chi phí lắp đặt ban đầu	150 000 đồng	Miễn phí
Cước hằng tháng	110 000 đồng	120 000 đồng

a) Viết công thức tính chi phí sử dụng truyền hình cáp y (nghìn đồng) của mỗi công ty A và B theo số tháng sử dụng là x (tháng).

b) Tính chi phí sử dụng truyền hình cáp trong 18 tháng của mỗi công ty A và B.

c) Với bao nhiêu tháng sử dụng thì chi phí sử dụng truyền hình cáp của hai công ty này là như nhau?

d) Vẽ đồ thị của hai hàm số nhận được ở câu a trên cùng một hệ trục toạ độ. Từ đó hãy cho biết nếu một gia đình dự định dùng dịch vụ truyền hình cáp trong 3 năm thì nên chọn dịch vụ của công ty A hay công ty B để tiết kiệm chi phí hơn (Giả sử chất lượng dịch vụ truyền hình cáp của hai công ty này là như nhau).

HĐ2 **Tính giá trị sổ sách của tài sản bằng phương pháp khấu hao đường thẳng**

Trong lí thuyết tài chính, *giá trị sổ sách* là giá trị của một tài sản mà công ty sử dụng để tạo ra bảng cân đối kế toán của mình. Một số công ty khấu hao tài sản của họ bằng cách sử dụng khấu hao đường thẳng để giá trị của tài sản giảm một lượng cố định mỗi năm. Mức suy giảm phụ thuộc vào thời gian sử dụng hữu ích mà công ty đặt vào tài sản.

Giả sử rằng một hãng taxi vừa mua một số ô tô để chạy dịch vụ với chi phí là 480 triệu đồng một chiếc. Công ty chọn khấu hao từng chiếc xe theo phương pháp khấu hao đường thẳng trong vòng 8 năm. Điều này có nghĩa là mỗi chiếc xe sẽ giảm giá $480 : 8 = 60$ triệu đồng mỗi năm.

a) Tính giá trị sổ sách y (triệu đồng) của mỗi chiếc ô tô dưới dạng một hàm số bậc nhất của thời gian sử dụng x (năm) của nó.

b) Vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất này.

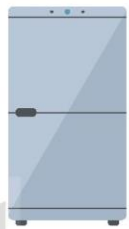
c) Giá trị sổ sách của mỗi chiếc ô tô sau 3 năm sử dụng là bao nhiêu?

d) Sau bao lâu thì giá trị sổ sách của mỗi chiếc ô tô còn lại là 150 triệu đồng?

Bước 2. Sử dụng các thông tin ở phần Chuẩn bị, mỗi nhóm lựa chọn một tình huống thực tế liên quan đến việc lựa chọn sản phẩm hoặc dịch vụ. Sau đó sử dụng kiến thức đã tiếp thu ở Bước 1 để ước tính chi phí khi sử dụng, từ đó có phương án lựa chọn hợp lí. Cuối cùng, các nhóm trình bày kết quả trước lớp. Khi xây dựng tình huống vận dụng thực tiễn, các nhóm có thể tham khảo các yêu cầu trong Vận dụng sau:

Vận dụng

Bác An dự định mua một chiếc tủ lạnh loại 150 lít của hãng *A*, có công suất 1 kWh/ngày với giá 5 000 000 đồng và dự định sẽ sử dụng nó trong vòng 10 năm.



a) Giả sử trung bình một tháng có 30 ngày và giá điện là 2 000 đồng/1 kWh. Hãy tính số tiền điện phải trả hằng tháng cho chiếc tủ lạnh này.

b) Giả sử trong quá trình sử dụng, tủ lạnh không bị hỏng hóc gì cần sửa chữa. Khi đó chi phí sử dụng tủ lạnh bao gồm chi phí mua ban đầu và chi phí trả tiền điện hằng tháng. Lập công thức tính chi phí sử dụng chiếc tủ lạnh này sau x (tháng).

c) Sử dụng công thức đã lập ở câu b, hãy tính chi phí sử dụng chiếc tủ lạnh này sau 5 năm.

d) Bác An dùng phương pháp khấu hao đường thẳng để tính giá trị còn lại của chiếc tủ lạnh sau mỗi năm sử dụng. Hỏi sau 7 năm giá trị còn lại của chiếc tủ lạnh này là bao nhiêu?

e) Hãng *B* cũng có một loại tủ lạnh 150 lít, công suất 1,25 kWh/ngày với giá bán là 4 460 000 đồng.

– Lập công thức tính chi phí sử dụng chiếc tủ lạnh của hãng *B* sau x (tháng).

– Sau bao nhiêu tháng sử dụng thì chi phí sử dụng của hai loại tủ lạnh này là bằng nhau?

– Vẽ đồ thị của hai hàm số chi phí sử dụng của hai loại tủ lạnh trên cùng một hệ trục toạ độ. Từ đồ thị đã vẽ, theo em bác An nên mua tủ lạnh của hãng *A* hay hãng *B* để tiết kiệm chi phí sử dụng hơn? (Giả sử bác An sẽ sử dụng trong vòng 10 năm và chất lượng của hai loại tủ lạnh là tương đương).

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ THALÈS, ĐỊNH LÍ PYTHAGORE VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG ĐỂ ĐO CHIỀU CAO, KHOẢNG CÁCH

Mục tiêu

- Ứng dụng định lí Thalès để đo chiều cao của ngọn cây (toà nhà, toà tháp).
- Ứng dụng định lí Pythagore và tam giác đồng dạng để đo khoảng cách những điểm không tới được.

HĐ1 **Dùng định lí Thalès để đo chiều cao của ngọn cây (toà nhà, toà tháp)**

Chuẩn bị:

– Cọc thẳng cắm được trên mặt đất hoặc dựng đứng được, thước ngắm thẳng gắn ở trên cọc có thể quay được, thước dây, thước kẻ.

– Giấy, bút, máy tính cầm tay.

– Địa điểm thực hiện: sân trường, nơi dã ngoại.

– Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 6 đến 8 học sinh.

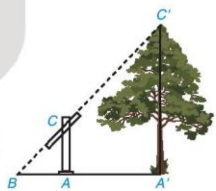
Hướng dẫn (H.T.1):

– Dựng cọc AC thẳng đứng trên mặt đất, chỉnh cho thước ngắm đi qua đỉnh C' của ngọn cây.

– Xác định giao điểm B của đường thẳng đi qua CC' (chứa thước ngắm) với mặt đất.

– Gọi A' là gốc cây thì $AC \,//\, A'C'$. Theo định lí Thalès ta có: $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BA}{BA'}$.

– Đo các khoảng cách AC, BA', BA và tính chiều cao $A'C'$ của cây theo công thức: $A'C' = \dfrac{AC \cdot BA'}{BA}$.



Hình T.1

– Các nhóm cùng đo chiều cao của một cây nhưng ở các vị trí khác nhau và so sánh kết quả với nhau.

HĐ2 **Dùng định lí Pythagore và tam giác đồng dạng để đo khoảng cách những điểm không tới được**

Chuẩn bị:

– Giác kế ngang (dụng cụ đo góc trên mặt đất), thước dây.

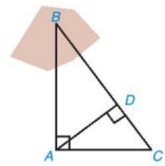
– Giấy, bút, máy tính cầm tay.

– Địa điểm thực hiện: sân trường, dã ngoại.

– Chia lớp thành các nhóm, mỗi nhóm từ 6 đến 8 học sinh.

Hướng dẫn đo khoảng cách từ vị trí đang đứng (điểm A) đến vị trí khó đi đến được (điểm B) theo một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1 (H.T.2):



Hình T.2

– Dùng giác kế chọn một điểm C sao cho AC vuông góc AB, chọn điểm D trên đường thẳng BC sao cho AD vuông góc BC.

– Diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$.

Do đó $AD^2 = \dfrac{AB^2 \cdot AC^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2}$.

Suy ra $AB^2 = \dfrac{AC^2 \cdot AD^2}{AC^2 - AD^2}$.

– Đo độ dài các đoạn thẳng AC, AD và tính ra kết quả độ dài đoạn thẳng AB.

Phương pháp 2 (H.T.3):

– Lấy một điểm E tuỳ ý khác điểm A và không nằm trên đường thẳng AB.

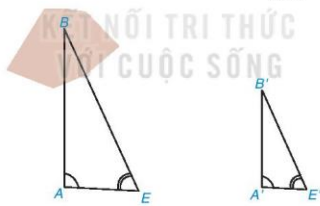
– Sử dụng giác kế xác định số đo các góc $\widehat{BAE}$ và $\widehat{BEA}$.

– Vẽ lên giấy tam giác $A'B'E'$ có các góc A' và E' tương ứng bằng các góc A và E của tam giác ABE.

Như vậy tam giác $A'B'E'$ đồng dạng với tam giác ABE. Suy ra $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'E'}{AE}$.

– Đo độ dài đoạn thẳng AE bằng thước dây và độ dài các đoạn thẳng $A'B'$, $A'E'$ bằng thước kẻ.

– Tính độ dài đoạn thẳng AB theo công thức $AB = \dfrac{A'B' \cdot AE}{A'E'}$.



Hình T.3

Các nhóm khác nhau có thể xác định vị trí các điểm C, D, E khác nhau và so sánh kết quả cuối cùng với nhau.

Luyện tập

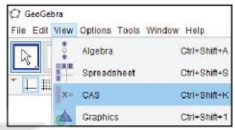
Trong Phương pháp 1 của HĐ2, chúng ta đã dùng định lí Pythagore để tính độ dài đoạn thẳng AB. Em hãy tính độ dài đoạn thẳng AB bằng một cách khác thông qua độ dài các đoạn thẳng AC, AD, CD.

THỰC HÀNH TÍNH TOÁN TRÊN PHÂN THỨC ĐẠI SỐ VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

Mục tiêu

Sử dụng phần mềm GeoGebra để tính toán các phép tính trên phân thức đại số, giải phương trình bậc nhất một ẩn và vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất.

Khởi động phần mềm GeoGebra, chọn View → Complex Adaptive System (CAS) để thực hiện tính toán các phép tính trên phân thức đại số, giải phương trình bậc nhất một ẩn; chọn Graphics để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất.



1 CÁC PHÉP TÍNH TRÊN PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

- Để rút gọn một phân thức, ta dùng lệnh Simplify(<phân thức>), khi đó kết quả sẽ hiển thị ngay bên dưới.

$$\text{Simplify}\left(\frac{x^4 - y^4}{y^3 - x^3}\right)$$

$$\to \frac{-x^3 - x^2\,y - x\,y^2 - y^3}{x^2 + x\,y + y^2}$$

Để nhập một phân thức, ta gõ tử số trong dấu (), sau đó dùng dấu /, và nhập mẫu.

- Để cộng, trừ, nhân các phân thức, tương tự như đối với đa thức, ta cũng nhập các phân thức và các phép toán vào ô lệnh trên cửa sổ CAS. Khi đó máy sẽ thực hiện phép tính và tự động rút gọn kết quả.

$$\frac{x \cdot y}{x^2 - y^2} - \frac{x^2}{y^2 - x^2} + \frac{y^2 - 2 \cdot x}{y - x}$$

$$\to \frac{-y^2 + 3\,x}{x - y}$$

- Để thực hiện phép chia hai phân thức, ta nhập phân thức thứ nhất, dấu /, rồi nhập phân thức thứ hai. Khi đó máy sẽ thực hiện phép tính và tự động rút gọn kết quả.

1 $\dfrac{\frac{4x+12}{3x^2-x}}{\frac{x^2+3x}{1-3x}}$

$\rightarrow -\dfrac{4}{x^2}$

Khi nhập phép chia hai phân thức, máy sẽ hiểu là ta tính một phân thức hữu tỉ có tử và mẫu là các phân thức.

2 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Để giải phương trình nói chung, phương trình bậc nhất một ẩn nói riêng, ta dùng lệnh Solve(<phương trình>) hoặc Solutions(<phương trình>) trên ô lệnh của cửa sổ CAS, kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1 Solutions(2 (x + 1) − 5 = 5 (1 − x))

$\rightarrow \left\{\dfrac{8}{7}\right\}$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thì kết quả hiển thị là $\{x\}$.

Phương trình vô nghiệm thì kết quả hiển thị là {}.

1 Solutions(3 (x + 1) − x = 3 + 2x)

$\rightarrow \{x\}$

1 Solve(2 (x + 1) = 3 + 2x)

$\rightarrow \{\}$

3 VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Khởi động GeoGebra và chọn View → Graphics để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất. Khi đó màn hình hiển thị sẵn hệ trục toạ độ dạng lưới ô vuông.

Có hai cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất:

Cách 1. Xác định hai điểm thuộc đồ thị hàm số rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

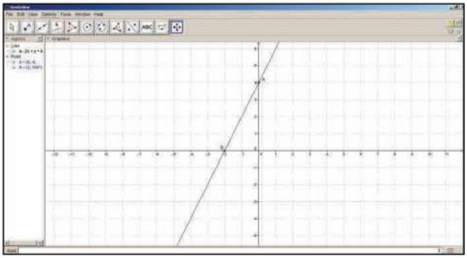
Cách 2. Nhập hàm số vào ô lệnh, màn hình sẽ hiển thị đồ thị của hàm số cần vẽ.

Ví dụ. Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 4$.

Cách 1 (H.T.4).

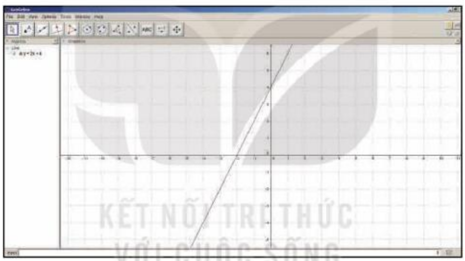
Bước 1. Lấy điểm $A(0; 4)$ và điểm $B(-2; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ bằng cách lần lượt nhập (0, 4) và (−2, 0) vào ô lệnh, màn hình sẽ hiển thị hai điểm A và B trên hệ trục toạ độ.

Bước 2. Trên thanh công cụ, chọn đường thẳng đi qua hai điểm để vẽ đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm A và B.



Hình T.4

Cách 2. Nhập $y = 2x + 4$ trên ô lệnh, màn hình sẽ hiển thị đồ thị của hàm số (H.T.5).



Hình T.5

Thực hành

Sử dụng phần mềm GeoGebra, hãy thực hiện các yêu cầu sau đây.

1. Tính:

$$\frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y} + \frac{y + x}{x}.$$

2. Giải các phương trình sau:

a) $4{,}8 - 2{,}5(x + 3) = x + 0{,}5(2 - 6x)$;

b) $2\left(x + \frac{4}{5}\right) = 3 - \left(\frac{7}{5} - 2x\right)$.

3. Vẽ đồ thị của các hàm số bậc nhất sau:

a) $y = -3x + 3$;

b) $y = \frac{1}{2}x - 4$.

MÔ TẢ THÍ NGHIỆM NGẪU NHIÊN VỚI PHẦN MỀM EXCEL

Mục tiêu

Mô tả thí nghiệm ngẫu nhiên với phần mềm bảng tính Excel, sử dụng một số hàm cơ bản và tính xác suất thực nghiệm của biến cố để thấy rằng khi số lần thực hiện thí nghiệm càng lớn thì xác suất thực nghiệm càng xấp xỉ tốt cho xác suất.

Chuẩn bị:

- Máy tính có cài đặt phần mềm bảng tính Excel.
- Tìm hiểu về cú pháp của hai hàm RANDBETWEEN, VLOOKUP, COUNTIF.

Bài toán: Một túi kín đựng 6 quả bóng có cùng kích thước, trong đó có 3 quả bóng xanh, 2 quả bóng đỏ và 1 quả bóng vàng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong túi 100 lần (có hoàn lại). Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Lấy được quả bóng màu xanh".

Các bước thực hiện

Bước 1 (*Chuẩn bị dữ liệu*):

- Mở phần mềm bảng tính Excel, nhập các giá trị 1; 2; 3; 4; 5; 6 vào các ô A1; A2; A3; A4; A5; A6.
- Nhập ba từ "Xanh", hai từ "Đỏ", một từ "Vàng" tương ứng vào các ô B1; B2; B3; B4; B5; B6.

Bước 2 (*Thực hiện lấy bóng*):

- Trong ô C1 gõ hàm "=RANDBETWEEN(1;6)".
- Trong ô D1 gõ hàm "=VLOOKUP(C1; $A$1:$B$6; 2)".
- Copy công thức của 2 ô C1, D1 bằng cách kéo từ dòng 1 đến dòng 100.
- Kết quả lấy bóng 100 lần được cho trong cột D từ dòng 1 đến dòng 100.

Bước 3 (*Tính xác suất thực nghiệm*):

- Trong ô E1 ghi "Xác suất thực nghiệm".
- Trong ô E2 nhập hàm "=COUNTIF(D1:D100,"Xanh")/100".

Bước 4 (*Giải thích kết quả*):

Chẳng hạn ta thu được bảng sau:

	A	B	C	D	E
1	1	Xanh	6	Vang	Xác suất thực nghiệm
2	2	Xanh	1	Xanh	0,53
3	3	Xanh	6	Vang	
4	4	Do	1	Xanh	
5	5	Do	5	Do	
6	6	Vang	4	Do	
7			2	Xanh	
8			3	Xanh	
9			4	Do	
10			4	Do	

Vậy ở lần 1 ta lấy được quả bóng màu vàng, lần 2 lấy được quả bóng màu xanh,... Kết quả của các lần lấy bóng được cho trong cột D. Sau 100 lần, xác suất thực nghiệm của sự kiện "Lấy được quả bóng màu xanh" là 0,53.

Bước 5. Tăng số lần thực hiện thí nghiệm lên 200; 300;...; 500 và nhận xét về kết quả tính xác suất thực nghiệm so với xác suất.

Vận dụng

Em hãy luyện tập tương tự với thí nghiệm sau:

Một túi kín đựng 8 quả bóng có cùng kích thước, trong đó có 1 quả màu xanh, 2 quả màu vàng, 2 quả màu đỏ và 3 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong túi 200 lần (có hoàn lại). Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Lấy được quả bóng không phải màu đen".

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(2x + y)^2 + (5x - y)^2 + 2(2x + y)(5x - y)$;

b) $(2x - y^3)(2x + y^3) - (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$.

2. Cho đa thức $P = x^2 - y^2 + 6x + 9$.

a) Phân tích đa thức P thành nhân tử.

b) Sử dụng kết quả của câu a để tìm thương của phép chia đa thức P cho $x + y + 3$.

3. Cho đa thức $f(x) = x^2 - 15x + 56$.

a) Phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử.

b) Tìm x sao cho $f(x) = 0$.

4. Cho phân thức $P = \dfrac{2x^3 + 6x^2}{2x^3 - 18x}$.

a) Viết điều kiện xác định và rút gọn phân thức P.

b) Có thể tính giá trị của P tại $x = -3$ được không? Vì sao?

c) Tính giá trị của phân thức P tại $x = 4$.

d) Với các giá trị nguyên nào của x thì P nhận giá trị nguyên?

5. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x+y}{1-xy} + \dfrac{x-y}{1+xy}\right) : \left(1 + \dfrac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2}\right)$, trong đó x và y là hai biến thoả mãn điều kiện $x^2y^2 - 1 \neq 0$.

a) Tính mỗi tổng $A = \dfrac{x+y}{1-xy} + \dfrac{x-y}{1+xy}$ và $B = 1 + \dfrac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2}$.

b) Từ kết quả câu a, hãy thu gọn P và giải thích tại sao giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của biến y.

c) Chứng minh đẳng thức $P = 1 - \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$.

d) Sử dụng câu c, hãy tìm các giá trị của x và y sao cho $P = 1$.

6. Bảng giá cước của một hãng taxi như sau:

Giá mở cửa (từ 0 đến 1 km)	Giá cước các kilômét tiếp theo (từ trên 1 km đến 30 km)	Giá cước từ kilômét thứ 31
10 000 đồng	13 600 đồng	11 000 đồng

a) Tính số tiền taxi phải trả khi di chuyển 35 km.

b) Lập công thức tính số tiền taxi y (đồng) phải trả khi di chuyển x kilômét, với $1 < x \leq 30$. Từ đó tính số tiền taxi phải trả khi di chuyển 30 km.

c) Nếu một người phải trả số tiền taxi là 268 400 đồng, hãy tính quãng đường người đó đã di chuyển bằng taxi.

7. Với giá trị nào của m, đường thẳng $y = mx + 1$ ($m \neq 0$):

a) song song với đường thẳng $y = 3x$?

b) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2?

c) đồng quy với các đường thẳng $y = 5x - 2$ và $y = -x + 4$ (tức là ba đường thẳng này cắt nhau tại một điểm)? Với giá trị m tìm được, hãy vẽ ba đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ để kiểm nghiệm lại kết quả.

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

8. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi H là trung điểm của OB, K là trung điểm của OD.

a) Hỏi tứ giác $AHCK$ là hình gì?

b) Hình bình hành $ABCD$ phải thoả mãn điều kiện gì để tứ giác $AHCK$ là:

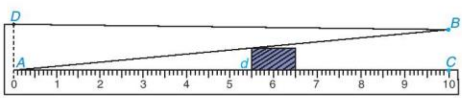
- một hình thoi?
- một hình chữ nhật?
- một hình vuông?

9. Cho tam giác ABC. Các đường trung tuyến AF, BE và CD cắt nhau tại G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của BG và CG.

a) Chứng minh rằng tứ giác $DEKI$ là hình bình hành.

b) Biết $AF = 6$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng DI và EK.

10. Hình sau mô tả một dụng cụ đo bề dày (nhỏ hơn 1 cm) của số sản phẩm. Dụng cụ này gồm một thước $AC = 10$ cm, có vạch chia đến 1 mm, gắn với một bản kim loại có cạnh thẳng AB sao cho khoảng cách $BC = 1$ cm.



Muốn đo bề dày của vật, ta kẹp vật vào giữa bản kim loại và thước (đáy của vật áp vào bề mặt của thước AC). Khi đó trên thước ta đọc được "bề dày" d của vật (trên hình vẽ ta có $d = 5,5$ mm). Hãy giải thích tại sao với dụng cụ đó, ta có thể đo được bề dày d của các vật (với $d < 10$ mm).

11. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Hai đường phân giác BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BIC \backsim \Delta EIF$;

b) $FB^2 = FI \cdot FC$;

c) Cho biết $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm. Tính EF.

12. Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông, có các đường cao BE, CF cắt nhau tại điểm H.

a) Giả sử ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$; từ đó suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$. Kết quả đó còn đúng không, nếu ABC là tam giác tù (chỉ cần xét 2 trường hợp: góc A tù và góc B tù)?

b) Cho biết $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm và $BE = 8$ cm. Tính EF.

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

13. Cho bảng thống kê sau:

Xếp loại	Tốt	Khá	Đạt	Không đạt
Lớp Vuông	7	10	15	10
Lớp Tròn	10	15	8	9

Để so sánh số lượng học sinh ở mỗi mức xếp loại của hai lớp ta nên dùng biểu đồ nào? Hãy vẽ biểu đồ đó.

14. Một túi đựng 24 viên bi giống hệt nhau chỉ khác màu, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh, 4 viên bi màu vàng và 5 viên bi màu đen. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong túi.

a) Có bao nhiêu kết quả có thể? Các kết quả có thể này có đồng khả năng không? Tại sao?

b) Tính khả năng để xảy ra mỗi kết quả có thể đó.

c) Tính xác suất để An lấy được:

- Viên bi màu đỏ hoặc màu vàng.
- Viên bi màu đen hoặc màu xanh.
- Viên bi không có màu đen.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH
Điều kiện xác định của phân thức	Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0
Định lí Pythagore	Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông
Định lí Pythagore đảo	Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông
Đồ thị của hàm số	Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ
Giải phương trình	Tìm tất cả các nghiệm (hay tập nghiệm) của phương trình
Hai tam giác đồng dạng	Hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ
Hàm số	Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là một hàm số của x, và x gọi là biến số
Hệ số góc của đường thẳng	Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ có hệ số góc là a
Mặt phẳng toạ độ	Mặt phẳng có hệ trục toạ độ Oxy
Nghiệm của phương trình	Số x_0 mà khi thay vào phương trình thì hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị
Phân thức đại số	Biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0
Phương trình bậc nhất một ẩn	Phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó a, b là những hằng số và $a \neq 0$
Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức	Biến đổi các phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho
Tỉ số đồng dạng của hai tam giác	Tỉ số các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng
Xác suất thực nghiệm của một biến cố	Tỉ số giữa số lần xuất hiện biến cố và số lần thực hiện thực nghiệm hoặc theo dõi sự kiện, hiện tượng đó
Xác suất của một biến cố (trường hợp cổ điển)	Tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố và tổng số kết quả có thể xảy ra

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

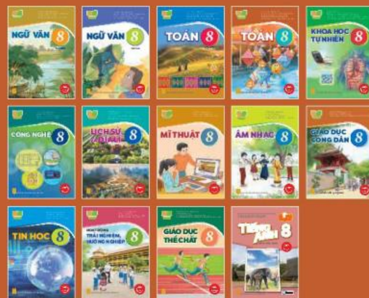
Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – NGUYỄN TRỌNG THIỆP
Biên tập mĩ thuật: PHẠM VIỆT QUANG
Thiết kế sách: NGUYỄN HỒNG SƠN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: NGUYỄN HỒNG SƠN
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TOÁN 8 - TẬP HAI
Mã số:
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Địa chỉ: ...
Số ĐKXB: .../CXBIPH/.../GD.
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: Tập một:
Tập hai:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH



BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 8 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 8, tập một
2. Ngữ văn 8, tập hai
3. Toán 8, tập một
4. Toán 8, tập hai
5. Khoa học tự nhiên 8
6. Công nghệ 8
7. Lịch sử và Địa lí 8
8. Mĩ thuật 8
9. Âm nhạc 8
10. Giáo dục công dân 8
11. Tin học 8
12. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 8
13. Giáo dục thể chất 8
14. Tiếng Anh 8 – Global Success – SHS

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

Giá: .... đ